Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

f *integrierbar* $\Leftrightarrow$
Es gibt Treppenfunktionen $\underline{f}_n, \overline{f}_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$\underline{f}_{n-1} \leq \underline{f}_n \leq f \leq \overline{f}_n \leq \overline{f}_{n-1} \quad \forall n$$

$$\int_a^b \overline{f}_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \underline{f}_n(x)\mathrm{d}x \quad \to 0$$

Das *Riemann-Integral* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ von f ist die durch die Intervallschachtelung

$$[\int_a^b \underline{f}_n(x)\mathrm{d}x,\ \int_a^b \overline{f}_n(x)\mathrm{d}x]\ (n \in \mathbb{N})$$

bestimmte reelle Zahl
- und unabhängig von den Treppenfunktionen

Riemannsumme von f für
Zerlegung $Z : a = z_0 < z_1 \ldots < z_n = b$ und
Zwischenvektor $\vec{\xi}$: $\xi_k \in]z_k, z_{k+1}[$

$$R(Z, \vec{\xi}, f) = \sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)(\Delta x)_k$$

f integrierbar $\Rightarrow$
Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ so, dass für
alle Zerlegungen Z von $[a, b]$ mit Maschenweite $\leq \delta$
und alle Zwischenvektoren $\vec{\xi}$ gilt:

$$|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - R(Z, \vec{\xi}, f)| \leq \varepsilon$$

Gegeben eine Abbildung $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, sei U_x das offene Intervall $]x - \delta(x),\, x + \delta(x)[$.
Eine Teilmenge D von $\mathbb{R}$ heisse *kompakt* für δ, wenn entweder

$$D \not\subseteq \bigcup_{x \in \mathbb{R}} U_x$$

oder es endlich viele $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ gibt so, dass

$$D \subseteq U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n}$$

Dabei o.B.d.A. $\delta(x_i) > 0$.

Satz 15.8 *Ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ ist kompakt bzgl. jeder Funktion δ.*

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heisst *gleichmäßig stetig* auf D, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so gibt, dass

$$\text{für alle } x, x' \in D: \; |x - x'| \leq \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$$

Satz 15.9 *Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so auch gleichmäßig stetig.*

Satz 15.10 *Jede stetige Funktion* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ist integrierbar und es gilt*

(i) *Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *gibt es* $\delta > 0$ *so, dass für alle* $a \leq c \leq d \leq b$ *mit* $d - c \leq \delta$ *und alle* $\xi \in [c, d]$ *gilt*

$$|\int_c^d f(x)\mathrm{d}x - f(\xi)(d-c)| \leq \varepsilon(d-c)$$

(ii) Mittelwertsatz*: Es gibt* $\xi \in [a, b]$ *mit* $\int_a^n f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.

Theorem 15.12 Summationstheorem. *Sei* $W(a, b) \in \mathbb{R}$ *für* $a \leq b$ *im offenen Intervall* $I \subseteq \mathbb{R}$ *definiert und gelte die* Additivität

$W(a, b) = W(a, c) + W(c, b)$ *falls* c *zwischen* a *und* b

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ *auf* I *stetig und gelte*

(∗) *Für alle* $\varepsilon > 0$ *gibt es ein* $\delta > 0$ *so, dass für alle* Δx *mit* $|\Delta x| \leq \delta$ *und alle* $p \in I$ *gilt:*

- *Es gibt* $\xi \in [p, p + \Delta x]$ *mit* $|W(p, p + \Delta x) - f(\xi)\Delta x| \leq \varepsilon|\Delta x|$

Dann gilt für alle $a \leq b$ *in* I*:* $W(a, b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Beweis. Sei $a \geq b$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle δ gemäß $(*)$ und Satz 15.10 so, dass

$$|\int_p^{p+\Delta x} f(x)\mathrm{d}x - f(\xi)\Delta x| \leq \varepsilon|\Delta x|$$

für alle $p \in [a,b]$, $|\Delta| \leq \delta$ und passendes $\xi \in [p,\, p+\Delta x]$.
Wähle ein Zerlegung $a = z_0 < z_1 \ldots < z_n = b$ von Maschenweite $\leq \delta$ und $\xi_k \in [z_k, z_{k+1}]$ so, dass

$$|W(z_k, z_{k+1}) - f(\xi_k)(z_{k+1} - z_k)| \leq \varepsilon(z_{k+1} - z_k)$$

Dann folgt

$$|W(z_k, z_{k+1}) - \int_{z_k}^{z_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x| \leq$$
$$\leq |W(z_k, z_{k+1}) - f(\xi_k)(z_{k+1} - z_k)| +$$
$$+ |f(\xi_k)(z_{k+1} - z_k) - \int_{z_k}^{z_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x| \leq$$
$$\leq 2\varepsilon(z_{k+1} - z_k)$$

also mit der Additiviät und Dreiecksungleichung

$$|W(a,b) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x| \leq$$
$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} |W(z_k, z_{k+1}) - \int_{z_k}^{z_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x| \leq 2\varepsilon(b-a)$$

Dies gilt für alle $\varepsilon > 0$, also nach Archimedes

$$W(a,b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad \square$$

Satz 15.13 Hauptsatz *Ist* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig und* $c \in [a,b]$, *so ist die Funktion* $F(\tau)$ *auf* $[a,b]$ *differenzierbar, wobei*

$$F(\tau) = \int_c^\tau f(t)\mathrm{d}t \quad \textit{und} \quad \frac{\partial F}{\partial t}(\tau) = f(\tau) \quad \tau \in [a,b]$$

Beweis.

$$\Delta F(\tau, \Delta\tau) = F(\tau + \Delta\tau) - F(\tau) = \int_\tau^{\tau+\Delta\tau} f(t)\mathrm{d}t$$

Nach Satz 15.10 (i) gibt es also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, dass für alle $|\Delta\tau| \leq \delta$ gilt

$$|F(\tau + \delta\tau) - F(\tau) - f(\tau)\Delta\tau| \leq \varepsilon|\Delta\tau|$$

und es folgt

$$|\frac{F(\tau + \Delta\tau) - F(\tau)}{\Delta\tau} - f(\tau)| \leq \varepsilon \quad \square$$