Die folgenden Wiederholungsaufgaben vom Klausurtyp wurden fortlaufend ergänzt. Dabei wurde die Nummerierung beibehalten. Die Ergänzung ist nunmehr abgeschlossen. Lösungen erstellen Sie bitte selbst.

Die Bewertung der Mehrfachauswahl- bzw. Zuordnungsaufgaben erfolgt so, dass für jede richtige Anwort eine Punkteinheit addiert wird, für jede falsche subtrahiert wird. Diese Aufgaben werden zusammengefasst und die Mindestpunktzahl beträgt dann 0.

Bei herkömmlichen Aufgaben zählt nicht das Ergebnis, sondern die nachvollziehbare Herleitung des Ergebnisses. Um Vorteile durch Rechnerverwendung auszuschliessen, sind exakte Ergebnisse unter Verwendung elementare Funktionen und Konstanten anzugeben. Numerische Näherungswerte werden gegebenenfalls in der Aufgabenstellung angegeben.

Für Studierende, die nicht ET 1 hören, durch ET-spezifische Aufgaben etwa entstehende Nachteile werden bei der Bewertung berücksichtigt.

1 Zahlen

1. Welche der folgenden Aussagen über Elemente eines Körpers K sind korrekt?

   - $(\sum_{i=0}^n x_i)(\sum_{j=0}^m y_j) = \sum_{0\leq i\leq n,\, 0\leq j\leq m} x_i y_j$
   - $(\sum_{i=0}^n x_i)(\sum_{j=0}^m y_j) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n x_j y_i$
   - $(\sum_{i=0}^n x_i) + (\sum_{j=0}^m y_j) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m x_i + y_j$
   - $(\sum_{i=0}^n x_i) + (\sum_{j=0}^m y_j) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m x_j + y_i$

2 Vektoren

1. Welche der folgenden Aussagen über Punkte P, Q, Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ des Raumes und Skalare r, s sind sinnvoll und korrekt?

   - $r\vec{v} + P$ ist ein Punkt
   - $\vec{v} + r\vec{w}$ ist ein Vektor
   - $P + Q$ ist ein Vektor
   - $P + Q$ ist ein Punkt

3 Logik

1. Welche der folgenden Aussagen über natürliche Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ sind korrekt?

   - $\exists x\, \forall y :\ x \leq y$
   - $\exists y\, \forall x :\ y \leq x$
   - $\forall y\, \exists x :\ x < y$
   - $\forall x\, \exists y :\ x < y$

2. Welche Schlussweisen sind korrekt?

- Aus $\exists x\,\forall y:\ A(x,y)$ folgt $\forall y\,\exists x:\ A(x,y)$
- Aus $\forall y\,\exists x:\ A(x,y)$ folgt $\exists x\,\forall y:\ A(x,y)$
- Aus $\forall x\,\forall y:\ A(x,y)$ folgt $\forall y\,\forall x:\ A(x,y)$
- Aus $\exists x\,\exists y:\ A(x,y)$ folgt $\exists y\,\exists x:\ A(x,y)$

4 Lineare Gleichungen

1. Sei K ein Körper, $A \in K^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in K^m$ und $\boldsymbol{y}_s \in K^n$ mit $A\boldsymbol{y}_s = \boldsymbol{b}$. Zeigen Sie: zu jedem $\boldsymbol{y} \in K^n$ mit $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ gibt es $\boldsymbol{y}_h \in K^n$ so, dass $A\boldsymbol{y}_h = \boldsymbol{0}$ und $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_h + \boldsymbol{y}_s$.

5 Vektorräume

1. Gegeben sei
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 5}$$
Bestimmen Sie eine Basis von $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$.

2. Welche der folgenden Aussagen über den Rang r einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sind korrekt?
   - Aus den Spalten von A kann man höchstens r unabhängige auswählen
   - A hat höchstens $n - r$ Nullzeilen
   - Das Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ hat höchstens $n - r + 1$ unabhängige Lösungen
   - $r = \dim\{\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ ist lösbar}\}$

6 Reelle Zahlen

1. Welche der folgenden Aussagen über $\mathbb{R}$ sind korrekt?
   - $\forall x,\, y:\ xy > 0 \ \Leftrightarrow\ (x > 0 \text{ und } y > 0)$
   - $\forall x,\, y,\, z:\ x + z > y + z \ \Leftrightarrow\ x > y$
   - $\forall x,\, y,\, z:\ xz \geq yz \ \Leftrightarrow\ x \geq y$

2. Welche der folgenden Aussagen über $\mathbb{R}$ sind korrekt?
   - $\forall x,\, y \in \mathbb{R}:\ |x + y| < |x| + |y|$
   - $\forall x,\, y \in \mathbb{R}:\ ||x| + |y|| \leq |x| + |y|$
   - $\forall x,\, y \in \mathbb{R}:\ ||x| - |y|| \leq |x - y|$

3. Zahldarstellung zur Basis 2. Bestimmen Sie $a_{-1}, a_0, a_1, a_2 \in \{0, 1\}$ so, dass
$$\sqrt{5} = a_{-1}2^1 + a_0 2^0 + a_1 2^{-1} + a_2 2^{-2} + r \qquad \text{mit } 0 \leq r < 2^{-2}$$

7 Skalarprodukt

1. Sei $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ eine Orthonormalbasis des Raumes. Seien die folgenden Vektoren gegeben
$$\vec{a} = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \quad \vec{b} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$
Bestimmen Sie $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass $\|\vec{b} - \lambda\vec{a}\|$ minimal wird.

2. Charakterisieren Sie die Vierecke mit zueinander senkrechten Diagonalen durch eine Aussage über die Seitenlängen. Beweisen Sie diese Charakterisierung.

3. Für die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ des Raumes sei bekannt
$$|\vec{a}| = 2, \ |\vec{b}| = 3, \ \langle \vec{a} \,|\, \vec{b} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b} = 18$$
Bestimmen Sie die Länge $|\vec{a} + \vec{b}|$.

8 Vektor- und Spatprodukt

1. Ordnen Sie den folgendeen Ausssagen über Vektoren $\neq \vec{0}$ des Raumes die äquivalente geometrische Aussage zu

   (i) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$

   (ii) $|\langle \vec{a} \,|\, \vec{b} \rangle| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$ und $|\langle \vec{a} \,|\, \vec{c} \rangle| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{c}\|$

   (iii) $\langle \vec{a} \times \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle = 0$

   (a) Für jeden Punkt P liegen $P, \vec{a} + P, \vec{b} + P, \vec{c} + P$ auf einer Geraden

   (b) Für jeden Punkt P liegen $P, \vec{a} + P, \vec{b} + P, \vec{c} + P$ auf einer Ebene

   (c) Für jeden Punkt P gilt $P = \vec{c} + \vec{b} + \vec{a} + P$

2. Seien $\vec{a}, \vec{b}$ unabhängige Vektoren des Raumes und O ein Punkt. Dann ist die Punktmenge $\{\vec{x} + O \mid \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}\}$

   - einelementig
   - eine Gerade
   - eine Ebene

9 Komplexe Zahlen

1. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von $((3 + 4j)^*)^{-1}$

2. Bestimmen Sie die Polardarstellung von $(-\sqrt{3} + 3j)^5$

3. Welche der folgenden Aussagen über komplexe Zahlen sind korrekt

   - $z \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $z = z^*$
   - $|z| = 1$ genau dann, wenn $z^{-1} = z^*$
   - $z = 0$ genau dann, wenn $z = jz$
   - $z^2 = |z|^2$

10 Sinus & Co

1. Stellen Sie $f(t) = 2\cos 3t - \sin 3t$ dar in der Form
$$f(t) = \mathsf{Re}(\alpha \mathsf{e}^{\mathsf{j}\omega \mathsf{t}}) \text{ mit } \alpha \in \mathbb{C}$$

2. Gegeben sei die Ellipse
$$f(t) = 2\cos t + \sin t + (\cos t + 3\sin t)j$$
   (i) Stellen Sie $f(t)$ in der folgenden Form dar
$$f(t) = re^{j(\omega t+\phi)} + se^{-j(\omega t-\psi)} \quad \text{mit } r, s \geq 0 \text{ in } \mathbb{R}$$
   (ii) Für welche t wird $|f(t)|$ maximal, für welche minimal? Bestimmen Sie die zugehörigen Werte $|f(t)|$.

11 Abbildungen der Ebene

1. Bestimmen Sie komplexe Zahlen α, β so, dass $f(z) = \alpha z + \beta$ die 45^o Drehung (im positiven Drehsinn) um den Punkt $2 + j$ ist.
2. Beschreiben Sie die Spiegelung an der Geraden durch 0 und $2 + j$ durch eine reelle Matrix bzgl. der Basis $1, j$ des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{C}$.
3. Bestimmen Sie die inverse Matrix zu
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$
4. Sei $f(z) = \frac{1}{z} + 2j$. Bestimmen Sie das Bild $\{f(z) \mid |z| = 2\}$ des Kreises mit Radius 2 um 0.
5. Sei $f(z) = \frac{1}{z+2}$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
   - Das Bild des Einheitskreises ist der Einheitskreis.
   - Das Bild einer Geraden durch 0 ist eine Gerade.
   - Das Bild eines Kreises, der -2 nicht enthält, ist ein Kreis.

12 Folgen

1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine relle Zahlenfolge. Zeigen Sie:
   (i) Divergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt gegen $+\infty$, so ist das auch für jede Teilfolge der Fall.
   (ii) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergent, wenn es keine bestimmt gegen $+\infty$ divergierende Teilfolge gibt.
2. Für welche $r \in \mathbb{R}$ konvergiert die Folge
$$a_n = r^n e^{jn\frac{\pi}{12}}$$

13 Stetige Funktionen

1. Geben Sie ein möglichst grosses Intervall an, auf dem $f(x) = x \arctan x$ umkehrbar ist.

2. Skizzieren Sie den Verlauf von $e^x,\ e^{-x},\ \ln x,\ \arctan x,\ \sinh x,\ \cosh x, \sqrt{x},\ \frac{1}{x},\ \frac{1}{x^2}$

3. Gegeben sei die Funktion
$$z = f(x, y) = x \cdot y$$
Erläutern Sie die Stetigkeit von f an der Stelle $(2, 1)$ anhand einer Skizze. Geben Sie ein möglichst kleines, aber sicheres ε an so, dass an der Stelle $(2, 1)$ gilt
$$|\Delta z| \leq \varepsilon \quad \text{falls } |\Delta x| \leq \frac{1}{10} \text{ und } |\Delta y| \leq \frac{1}{20}$$

14 Differenzieren

1. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und gelte
$$f' = g, \quad g' = -f, \quad f(42)^2 + g(42)^2 = 27$$
Zeigen Sie, dass $f(x)^2 + g(x)^2 = 27$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?
   - $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad (\exists b \forall x > b : \ f'(x) > 0)$
   - $(\exists b \forall x > b : \ f'(x) > 0) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
   - $(\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ und } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty) \quad \Rightarrow \quad \exists x : \ f(x) = 0$
   - $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \exists x_0 \, \forall x : \ f(x) \geq f(x_0)$

3. Sei $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch
$$\chi(x) = \begin{cases} -1 & x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$
Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit an der Stelle $p = 0$
$$f(x) = \sin(x) \cdot \chi(x), \quad g(x) = x\sqrt{x} \cdot \chi(x)$$

4. Sei
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$
Wie oft ist $f(x)$ differenzierbar? Begründung!

5. Bestimmen Sie die relativen Extrema der Funktion $f(x) = |\sin x|$ im Intervall $[-2\pi,\ 2\pi]$

6. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind

$$\begin{array}{ll} (1) & f(x) = x^2 \exp(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \\ (2) & f'(x) = f(x) + 2x\exp(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und } f(0) = 0 \end{array}$$

7. Bestimmen Sie das Differential $\mathrm{d}z(p, \mathrm{d}t)$ der komplexwertigen Funktion $z(t) = t\cos 2t + j\sin t$ an der Stelle p als Funktion von $\mathrm{d}t$

8. Für die Funktion $f(x) = x^2 e^x$, $x \in [-4, 4]$ bestimme man

   (i) die relativen und absoluten Extrema

   (ii) Die maximalen Teilintervalle, auf denen $f(x)$ monoton wachsend bzw. fallend ist

   (iii) Die maximalen Teilintervalle, auf denen $f(x)$ konvex bzw. konkav ist

   (iv) Skizzieren Sie den Verlauf von $f(x)$

9. Sei $f(x) = xe^x$ und $T_n(x)$ das Taylorpolynom bei Entwicklung an der Stelle 0. Für welche n kann nach dem Satz von Taylor $|f(\frac{1}{10}) - T_n(\frac{1}{10})| \leq \frac{1}{6}10^{-5}$ garantiert werden? Beweis!

10. Bestimmen Sie $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 3x}{x^2}$

15 Integrale

1. Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2^{n+2}} & \text{für } \frac{1}{2^n} < x < \frac{1}{2^{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N}_0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   Skizzieren Sie den Verlauf der Funktion. Handelt es sich um eine Treppenfunktion? Ist f Riemann-integrierbar? Begründung!

2. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und gelte

$$\int_a^b g = f(b) - f(a) \quad \text{für alle } a \leq b \text{ in } \mathbb{R}$$

   Zeigen Sie: zu $p, h \in \mathbb{R},\ h \neq 0$ gibt es stets ein $\xi \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{f(p+h) - f(p)}{h} = g(\xi) \quad \text{und } \xi \text{ zwischen } p \text{ und } p + h$$

3. Stellen Sie $\int x^2 \ln x \,\mathrm{d}x + C$ und $\int e^x \sin 2x \,\mathrm{d}x + C$ durch elementare Funktionen dar.

4. Stellen Sie $\int 2xe^{x^2+1} \,\mathrm{d}x + C$ durch elementare Funktionen und $\int_1^2 2xe^{x^2+1} \,\mathrm{d}x + C$ durch einen arithmetischen Ausdruck in e dar (numerischer Wert ≈ 141.024)

5. Stellen Sie $\int x^2 \ln x \,\mathrm{d}x + C$ und $\int e^x \sin 2x \,\mathrm{d}x + C$ durch elementare Funktionen dar.

16 Rationale Funktionen

1. Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung und ein unbestimmtes Integral von
$$\frac{x^2+x+1}{(x^2-4)(x+3)}$$

2. Stellen Sie $\int_0^1 \frac{x^2-2x+5}{x^3-2x^2+x-2}\,\mathrm{d}x$ als Ausdruck in elementaren Funktionen und Konstanten dar (numerischer Wert -2.26394)

3. Bestimmen Sie rationale Zahlen a, b so, dass
$$\frac{1}{\pi^2-4} = \frac{a}{\pi-2} + \frac{b}{\pi+2}$$

17 Hyperbelfunktionen, Flächen, uneigentliche Integrale

1. Skizzieren Sie die Funktion $(\sinh x)^2$ im Intervall $[-1, 1]$

2. Gegeben sei
$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(t) = |e^{-t} \cdot \sin t|.$$
Geben Sie einen vollständigen Beweis dafür, dass das (uneigentliche) Integral von f existiert. Die Berechnung des Integrals ist tunlichst zu unterlassen!

3. Für welche $\alpha > 0$ existiert das folgende uneigentliche Integral (als reelle Zahl) und was ist dann sein Wert?
$$\int_1^\infty x^{-\alpha}\mathrm{d}x$$