Mathematik I für Elektrotechniker, TUD WS 08/9
Teil a: Algebra und Geometrie

Inhaltsverzeichnis

1 Zahlen

1.1 Natürliche Zahlen

Die Arithmetik gründet auf das Prinzip des "Weiterzählens" und erscheint eng mit der Zeitvorstellung verbunden. Die Reihe $\mathbb{N}_0$ der *natürlichen Zahlen* $0, 1, 2, 3, \ldots$ nehmen wir als gegeben. Die relevante Struktur ist das ausgezeichnete Element 0 und die "Nachfolgeroperation" $n \mapsto n+1$. Sie wird charakterisiert durch die folgenden Eigenschaften

- 0 ist kein Nachfolger, d.h. $0 \neq n+1$ für alle n
- Aus $n+1 = m+1$ folgt $n = m$
- *Induktionsaxiom:* Ist $A(x)$ ein Aussage so, dass
  - $A(0)$ gilt (*Verankerung*)

  - und aus der *Induktionsannahme* $A(n)$ stets $A(n+1)$ folgt (*Induktionsschritt*),
  - so gilt $A(n)$ für alle n

Bei Anwendung des Axioms spricht man von einem *Beweis durch Induktion* oder *induktiven Beweis*. Hinzu kommt das (beweisbare) Prinzip der *rekursiven Definition*. Dieses erlaubt Addition, Multiplikation und Ordnung eindeutig einzufuehren.

$$m + 0 = m, \; m + (n+1) = (m+n) + 1 \quad \text{(Addition)}$$

$$m \cdot 0 = 0, \; m \cdot (n+1) = m \cdot n + m \quad \text{(Multiplikation)}$$

$$m \not< 0, \quad m < n+1 \text{ genau dann, wenn } m < n \text{ oder } m = n \quad \text{(Anordnung)}$$

Dass dann die Ihnen wohlbekannten Gesetze der Arithmetik gelten, kann man (meist durch Induktion) beweisen. Nach dem gleichen Prinzip definiert man

$$a^0 = 1, \quad a^{n+1} = a^n \cdot a \quad \text{(Exponentiation)}$$

$$0! = 1, \quad (n+1)! = n! \cdot (n+1) \quad \text{(Fakulät)}$$

Beispiel. Wir zeigen durch Induktion

$$(1) \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

- Verankerung $(ab)^0 = 1 = 1 \cdot 1 = a^0 b^0$.
- Induktionsannahme: $(ab)^n = a^n b^n$.
- Induktionsschritt: $(ab)^{n+1} = (ab)^n ab = a^n b^n ab = a^n a b^n b = a^{n+1} b^{n+1}$

$$(2) \quad \text{Für alle } m \text{ in } \mathbb{N}_0 \text{ gilt: } a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$

- Verankerung: $a^{m+0} = a^m = a^m \cdot 1 = a^m a^0$ für alle m
- Induktionsannahme: $a^{m+n} = a^m a^n$ für alle m
- Induktionsschritt: $a^{m+(n+1)} = a^{(m+n)+1} = a^{m+n} a = a^m a^n a = a^m a^{n+1}$

1.2 Ganze Zahlen

Die Zahl $a - b$ ist dadurch charakterisiert, dass $(a-b) + b = a$. Innerhalb der natürlichen Zahlen existiert sie genau dann, wenn $b \leq a$. Will man diese Einschränkung aufheben (und dafür gibt es viele praktische Gründe), so kommt man zu den *ganzen Zahlen*: diese haben eine eindeutige Darstellung der Form

$$n \text{ mit } n \in \mathbb{N}_0 \;\text{ bzw. }\; -n \text{ mit } n \in \mathbb{N}_0, n \neq 0$$

Wir rechnen mit Zahlen aus $\mathbb{N}_0$ wie vorher und setzen

$$n + (-m) = (-m) + n = \begin{cases} n - m & \text{falls } m \leq n \\ -(m-n) & \text{falls } n < m \end{cases} \qquad (-n) + (-m) = -(n+m)$$

$$(-n) \cdot m = m \cdot -(n) = -(nm), \quad (-n) \cdot (-m) = nm$$

$$-n < m, \quad -n < -m \text{ genau dann, wenn } m < n$$

Wir können nun die Umkehrung und die Subtraktion für beliebige ganze Zahlen definieren

$$-(-n) = n, \quad a - b = a + (-b)$$

Wieder ergibt sich die Aufgabe, alle Gesetze der Arithmetik nachzuweisen.

1.3 Rationale Zahlen

Die rationalen Zahlen entstehen als ganzzahlige Vielfache von Bruchteilen oder aus Zahlverhältnissen, d.h. sie werden durch "Quotienten" $\frac{z}{w}$ mit ganzen z, w und $w \neq 0$ repräsentiert und es gilt

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ genau dann, wenn } ad = cb$$

d.h. wir haben eine Äquivalenzrelation für formale Quotienten und durch Abstraktion erhalten wir den Bereich $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen. Addition und Multiplikation werden nach den hoffentlich bekannten Gesetzen der Bruchrechnung ausgeführt

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}, \quad -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

(wobei das Wichtigste der Nachweis ist, dass diese Definitionen unabhängig von der Wahl der Repräsentanten sind) und die ganzen Zahlen kann man auch darin wiederfinden: man identifiziere

$$a = \frac{a}{1}$$

Die Anordnung kann man auf $\mathbb{Q}$ übertragen durch

$$\frac{a}{b} > 0 \text{ genau dann, wenn } ab > 0, \quad r > s \text{ genau dann, wenn } r - s > 0$$

Zu rationalen Zahlen $\neq 0$ kann man jetzt den *Kehrwert* bilden

$$(\frac{a}{b})^{-1} = \frac{b}{a} \quad \text{für } a, b, \neq 0$$

und dieser ist charakterisiert durch $r \cdot r^{-1} = 1$. Dies erlaubt uns nun die Schreibweise

$$\frac{s}{r} = s \cdot r^{-1} \quad \text{für } r \in \mathbb{Q},\ r \neq 0$$

Auch hier kann (und sollte) man die bekannten Gesetze nachweisen.

1.4 Körperaxiome

Die grundlegenden Regeln für das Rechnen in $\mathbb{Q}$ (ohne die Anordnung) sind die folgenden

$$\begin{array}{rclrclr}
x+(y+z) & = & (x+y)+z & x(yz) & = & (xy)z & \text{Assoziativität} \\
x+y & = & y+x & xy & = & yx & \text{Kommutativität} \\
0+x & = & x & 1 \cdot x & = & x & \text{Neutralelement} \\
x+(-x) & = & 0 & x \cdot x^{-1} & = & 1 \text{ für } x \neq 0 & \text{Inverses}
\end{array}$$

$$x(y+z) = xy + xz \quad \text{Distributivität}$$

Ein Zahlbereich K mit binären Operationen $+$ und $\cdot$, Konstanten 0 und 1, und einstelligen Operationen $-$ und $^{-1}$ (letztere nur für $x \neq 0$ definiert), in dem diese Regeln gelten und $1 \neq 0$ ist, heisst ein *Körper*. Statt Statt $x + (-y)$ schreibt man auch $x - y$, statt xy^{-1} auch x/y. Weitere Beispiele sind die Körper $\mathbb{R}$ der reellen und $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Aber auch die Boolesche Algebra $\{0, 1\}$ mit den Operationen $\oplus$ (Exor) und $\cdot$ (Und) bildet einen Körper.

- In einem Körper hat jede Gleichung $a + x = b$ bzw. $ay = b$ mit $a \neq 0$ hat eine eindeutig bestimmte Lösung. Insbesondere $a = -(-a)$ und $a = (a^{-1})^{-1}$. Es gilt $0x = 0$, $-(-x) = x$, $-x = (-1)x$, $(-1)(-1) = 1$ und $(x^{-1})^{-1} = x$.

Beweis. Setze $x = b - a$. Dann $a + x = a + (b + (-a)) = a + ((-a) + b) = (a + (-a)) + b = 0 + b = b$. Ist umgekehrt $a + x = b$ gegeben, so $b - a = (a + x) - a = (a + x) + (-a) = x + (a + (-a)) = x + 0 = 0 + x = x$. Entsprechend $y = a^{-1}b = b/a$. $0x = (0+0)x = 0x + 0x$ also $0x = 0$. $-x + x = x - x = 0$ also $-(-x) = x$ und ebenso $(x^{-1})^{-1} = x$. $x + (-1)x = 1x + (-1)x = (1-1)x = 0x = 0$, also $(-1)x = -0 - x = -x$. $(-1)(-1) = -(-1) = 1$. □

1.5 Summation

Dank des Prinzips der Rekursion kann man für einen gegebenen Körper die mehrfache Summation erklären

$$\sum_{k=0}^{-1} x_k = 0, \quad \sum_{k=0}^{n+1} x_k = (\sum_{k=0}^{n} x_k) + x_{n+1}$$

Wenn man das verstanden hat, darf man schreiben

$$\sum_{k=0}^{n} x_k = x_0 + \ldots + x_n$$

und versteht auch problemlos z.B.

$$\sum_{k=m}^{n} x_k = x_m + \ldots + x_n \quad (0 \leq m \leq n)$$

$$\sum_{A(k)} x_k = x_{k_1} + \ldots + x_{k_m}$$

wobei $A(x)$ eine Aussage über natürliche Zahlen ist, die genau fuer die m Indizes $k_1, \ldots, k_m$ zutrifft. Die rekursive Definition sieht hier so aus

- $\sum_{A(k)} x_k = 0$ falls $A(k)$ für kein k gilt
- $\sum_{A(k)} x_k = (\sum_{A(k) \text{ und } k \neq m} x_k) + x_m$, wobei m das grösste k mit $A(k)$ ist.

Es gilt

$$(\sum_{A(k)} x_k) + (\sum_{B(k)} x_k) = \sum_{A(k) \text{ oder } B(k)} x_k \quad \text{falls nie } A(k) \text{ und } B(k) \text{ gleichzeitig.}$$

Durch Induktion beweist man

$$y \sum_{A(k)} x_k = \sum_{A(k)} y x_k.$$

Will man zwei Summen multiplizieren, so muss man sie vollständig ausmultiplizieren. Das ist leicht gemacht, aber schwer gesagt. Am besten erweitert man nochmal die Summennotation

$$(\sum_{A(k)} x_k) \cdot (\sum_{B(l)} y_l) = \sum_{A(k)} \sum_{B(l)} x_k y_l = \sum_{A(k) \text{ und } B(l)} x_k y_l.$$

Allgemeiner hat man *Doppelsummen*

$$\sum_{A(k)}\sum_{B(l)} z_{kl} = \sum_{A(k) \text{ und } B(l)} z_{kl} = \sum_{B(l)}\sum_{A(k)} z_{kl}.$$

Bei einer Doppelsumme kann der Bereich der inneren Summation auch vom äußeren Index abhängen

$$\sum_{A(k)}\sum_{B(k,l)} z_{kl} = \sum_{A(k) \text{ und } B(k,l)} z_{kl}.$$

1.6 Produkte

Die rekursive Definition von Produkten geht analog zu Summen

- $\prod_{A(k)} x_k = 1$ falls $A(k)$ für kein k gilt
- $\prod_{A(k)} x_k = (\prod_{A(k) \text{ und } k\neq m} x_k) \cdot x_m$, wobei m das grösste k mit $A(k)$ ist.

In einer weiteren Verallgemeinerung kann man auch ganze Zahlen als Indizes k zulassen, oder gar Elemente einer beliebigen *Index-Menge*.

1.7 Ordnungsinduktion

Für manche Induktionsbeweise braucht man ein griffigeres Prinzip, das Prinzip der *Ordnungsinduktion*: Kann man zu fest aber beliebig gegebenem $n \in \mathbb{N}_0$ aus der

- *Induktionsannahme*: $A(m)$ für alle $m < n$, $m \in \mathbb{N}_0$
- stets auf $A(n)$ schliessen (*Induktionsschritt*)
- so gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

Anders formuliert: Jede nichtleere Menge X natürlicher Zahlen enthält ein minimales Element a: d.h. $a \in X$ und $x \notin X$ für alle $x < a$. Das kann man mit dem Induktionsaxiom beweisen.

Beispiel. Jede natürliche Zahl $a \neq 0, 1$ ist ein Produkt von Primzahlen (wobei p Primzahl genau dann, wenn $p \neq 0, 1$ und wenn $p = uv$ nur mit $u = 1,\ v = p$ bzw. $u = p,\ v = 1$ möglich ist. Beweis:

- Induktionsannahme: Jedes $y < a$ mit $y \neq 0, 1$ ist Produkt von Primzahlen.
- Induktionsschritt: Gegeben $a \neq 0, 1$. Entweder ist a Primzahl (und damit die Aussage schon bewiesen), oder $a = bc$ mit $b, c \neq 0, 1$. Nach Induktionsannahme $b = p_1 \cdots p_n$ und $c = q_1 \cdots q_m$ mit Prinzahlen p_k und q_l. Also $a = p_1 \cdots p_n \cdot q_1 \cdots q_m$ Produkt von Primzahlen.

2 Vektoren

Wir setzen Kenntnis und anschauliches Verständnis der Grundtatsachen elementarer Geometrie voraus. Ziel dieses Kapitels ist es, dieses Verständnis zu vertiefen und gleichzeitig in die vektorielle Geometrie einzuführen. Während wir Punkte, Geraden, Ebenen und die Beziehungen zwischen ihnen als geometrische Gegebenheiten akzeptieren, müssen wir den Begriff des "Vektors" erst erarbeiten. Die Motivation für Vektoren kommt natürlich aus der Physik z.B. Kraft- und Geschwindigkeitsvektoren

Eine vektorielle Grösse wird angegeben durch Betrag/Länge und Richtung

Als geometrisches Objekt ist ein Vektor demnach eindeutig bestimmt durch "Länge" und "Richtung". Insbesondere ist die Gleichheit von Vektoren die Gleichheit nach Länge und Richtung. Was aber ist damit gemeint?

2.1 Pfeile

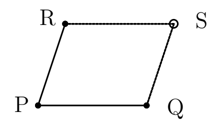
Um eine bestimmte Länge und Richtung anzugeben, weist man am einfachsten ein Objekt auf, dem diese zukommen. Zum Beispiel einen *Pfeil*, d.h. ein Punktepaar $PQ = (P, Q)$ bestehend aus Anfangspunkt P und Endpunkt Q des Pfeils. Wir haben damit einen neuen Typ von geometrischen Objekten und müssen nun präzisieren, was "Übereinstimmung nach Länge und Richtung", kurz "Äquivalenz", heissen soll. Zwei Pfeile PQ und RS, die nicht auf einer Geraden liegen, heissen *aquivalent* und wir schreiben $PQ \sim RS$, wenn die zugehörigen Punkte ein Parallelogramm wie in der Skizze bilden.

Für Pfeile, die auf derselben Geraden g liegen, definieren wir

$$PQ \sim RS \;\Leftrightarrow\; \text{es gibt } UV \text{ nicht auf } g \text{ mit } PQ \sim UV \text{ und } UV \sim RS$$

dabei kann man U sogar beliebig (ausserhalb g) vorgeben. Festzuhalten ist, dass die Relation der Äquivalenz mittels Geodreieck und Lineal überprüft werden kann.

Elementargeometrisch kann man die Parallelogrammergänzung zeigen:
Zu den Punkten P, Q, R gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt S mit $PQ \sim RS$.



2.2 Vektoren

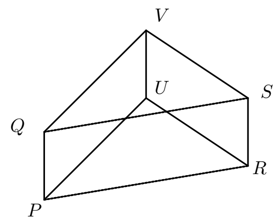
Wir wollen nun den Begriff "Vektor" dadurch einführen, dass wir sagen:

- *Pfeile repräsentieren genau dann denselben Vektor, wenn sie äquivalent sind.*

Wenn das nicht zu Widersprüchen führen soll, muss $\sim$ eine "Äquivalenzrelation" sein, d.h. die folgenden Grundeigenschaften einer Gleichheitsrelation erfüllen

- $PQ \sim PQ$ (*Reflexivität*)
- Aus $PQ \sim RS$ folgt $RS \sim PQ$ (*Symmetrie*)
- Aus $PQ \sim UV$ und $UV \sim RS$ folgt $PQ \sim RS$ (*Transitivität*)

Die ersten beiden Eigenschaften sind offensichtlich erfüllt, hinter der dritten steckt ein zwar anschaulich einsichtiger, aber nicht trivialer Satz (vgl. Skizze).



Durch "Abstraktion" nach dieser Äquivalenzrelation erhalten wir numehr den Begriff *Vektor*:

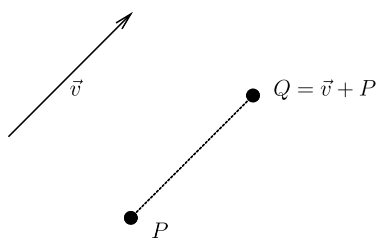
- Vektoren sind Grössen, die durch Pfeile repräsentiert werden
- Jeder Pfeil PQ repräsentiert genau einen Vektor $\overrightarrow{PQ}$
- $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ genau dann, wenn $PQ \sim RS$
- Gilt $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$, so $P = R$ genau dann, wenn $Q = S$

Entscheidend für das Zusammenspiel zwischen Punkten und Vektoren und damit die Grundlage für das Rechnen mit Vektoren sind nun die folgenden beiden Tatsachen

(A1) Zu jedem Punkt P und Vektor $\vec{v}$ gibt es genau einen Punkt Q mit $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$. Wir schreiben

$$Q = \vec{v} + P.$$

(A2) Zu je zwei Punkten P, Q gibt es genau einen Vektor $\vec{v}$ mit $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ (gleichwertig: mit $Q = \vec{v} + P$)



Ist nämlich $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, so erhält man $Q = \vec{v} + P$, indem man A, B, P zum Parallelogramm ergänzt und Q ist dadurch eindeutig bestimmt, unabhängig von der Wahl des repräsentierenden Pfeils: Ist $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ und Q' die Ergänzung von A', B', P zum Parallelogramm, so $PQ \sim AB \sim A'B' \sim PQ'$, also $PQ \sim PQ'$ und daher $Q = Q'$. Wir haben somit eine wohldefinierte Operation $+$, die Vektoren mit Punkten zu Punkten verknüpft. In der zweiten Aussage steckt die Tatsache, dass wir Vektoren durch Abstraktion aus der Menge der Pfeile eingeführt haben.

2.3 Vektoraddition

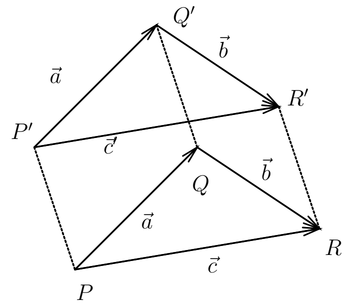
Zu je zwei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ gibt es genau einen Vektor $\vec{c}$ so, dass es Punkte $P.Q.R$ gibt mit

$$\vec{a} = \overrightarrow{PQ} \text{ und } \vec{b} = \overrightarrow{QR} \text{ und } \vec{c} = \overrightarrow{PR}$$

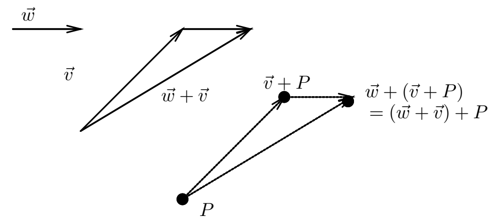
Damit dürfen wir definieren:

$$\vec{b} + \vec{a} := \vec{c}$$

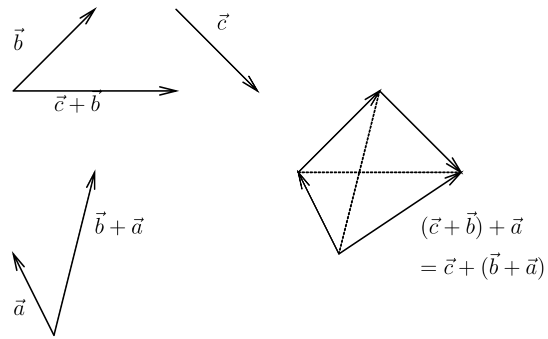
Die Existenz von $\vec{c}$ ist klar, die Eindeutigkeit ergibt sich aus der Skizze. Weiterhin erhalten wir



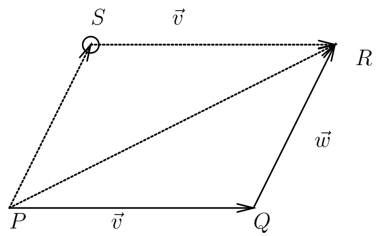
(A3) $(\vec{w} + \vec{v}) + P = \vec{w} + (\vec{v} + P)$



(V1) $(\vec{w} + \vec{v}) + \vec{u} = \vec{w} + (\vec{v} + \vec{u})$



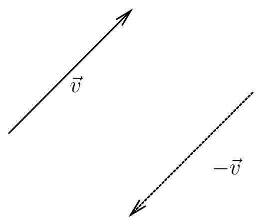
(V2) $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$



- Alle Pfeile PP repräsentieren denselben Vektor $\vec{0}$ und es gilt

$$\text{(A4)}\ \ \vec{0} + P = P, \quad \text{(V3)}\ \ \vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$$

- Zu jedem Vektor $\vec{a}$ gibt es genau einen Vektor $\vec{b}$ so, dass es Punkte P, Q gibt mit $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{QP}$.



Somit erhalten wir eine wohldefinierte Operation $\vec{a} \mapsto -\vec{a}$ mit

$$-\vec{a} = \overrightarrow{QP} \text{ genau dann, wenn } \vec{a} = \overrightarrow{PQ}$$

und es gilt

$$\text{(V4)}\ \ \vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$$

2.4 Rationale Vielfache von Vektoren

Durch Rekursion können wir für einen Vektor $\vec{a}$ die Vielfachen $n\vec{a}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ definieren

$$0\vec{a} = \vec{0}, \ \ (n+1)\vec{a} = n\vec{a} + \vec{a}$$

Die Geometrie lehrt uns

$$n\vec{a} = \vec{0} \text{ genau dann, wenn } \vec{a} = 0 \text{ oder } n = 0$$

und dass wir jeden Vektor in n gleiche Teile teilen können

- Zu jedem Vektor $\vec{a}$ und jedem $n \in \mathbb{N}_0,\ n \neq 0$ gibt es einen eindeutig bestimmten Vektor $\vec{b}$ mit

$$n\vec{b} = \vec{a} \quad \text{geschrieben } \vec{b} = \frac{1}{n}\vec{a}$$

Damit können wir nun $r\vec{a}$ für beliebige $r \in \mathbb{Q}$ definieren

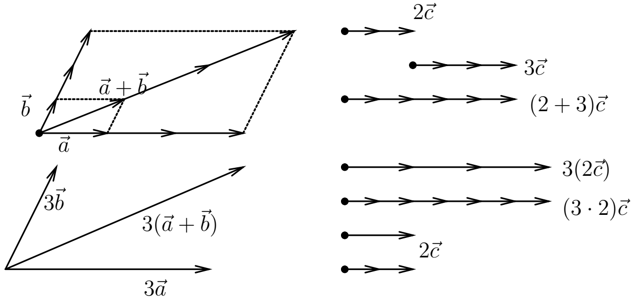
$$\frac{m}{n}\vec{a} = m(\frac{1}{n}\vec{a}), \quad \frac{-m}{n}\vec{a} = -(m(\frac{1}{n}\vec{a})) \ \ m, n \in \mathbb{N}_0,\ n \neq 0$$

und die folgenden Gesetze für alle Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ und rationalen Zahlen r, s nachweisen

$$\text{(V5)}\ \ r(\vec{v} + \vec{w}) = r\vec{v} + r\vec{w}$$

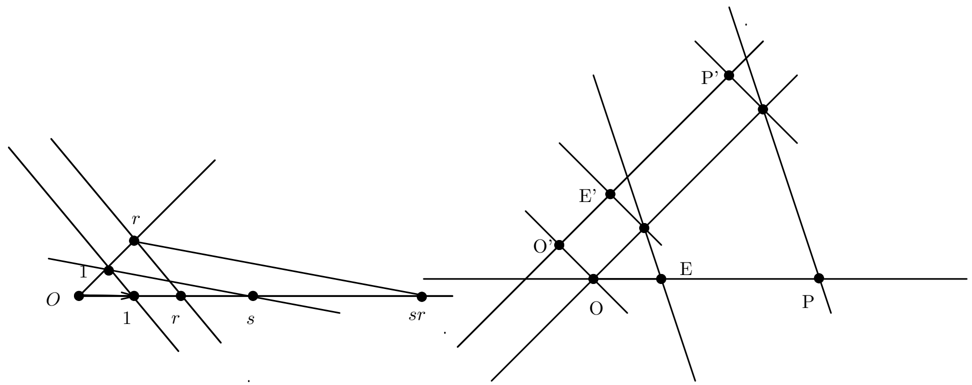
$$\text{(V6)}\ \ 1\vec{v} = \vec{v}, \quad \text{(V7)}\ \ (r+s)\vec{v} = r\vec{v} + s\vec{v}, \quad \text{(V8)}\ \ r(s\vec{v}) = (rs)\vec{v}$$

wobei das erste eine Form des Strahlensatzes ist.



2.5 Zahlengerade

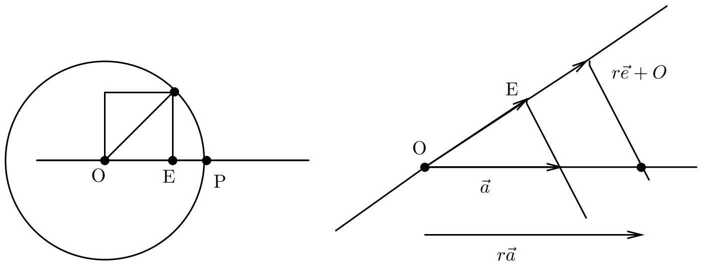
Zeichnen wir eine Gerade g aus und auf dieser zwei Punkte $O \neq E$ und setzen wir $\vec{e} = \overrightarrow{OE}$, so können wir jeder rationalen Zahl r einen eindeutig bestimmten Punkt $\phi(r)$ auf g zuordnen: $\phi(r) = r\vec{e} + O$. Dann erhalten wir $\phi(r+s)$ durch Vektoraddition $\phi(r+s) = r\vec{e} + s\vec{e} + O$ und $\phi(rs)$ mithilfe des Strahlensatzes



Durch die Auszeichnung von O und E machen wir g zu einer *Zahlengeraden* - und haben damit zumindest die rationalen Zahlen erfasst. Der Übergang zwischen Zahlengeraden erfolgt wie in der zweiten Skizze.

Schliesslich ist $r \geq 0$ genau dann, wenn $P = r\vec{e} + O$ auf derselben Seite von O wie E liegt, d.h. wenn P zischen O und E oder E zwischen O und P liegt.

Es gibt jedoch auf jeder Zahlengeraden (unheimlich viele) nicht rationale Punkte, d.h. Punkte die nicht von der Form $r\vec{e} + O$ mit $r \in \mathbb{Q}$ sind, z.B. P aus folgender Skizze



Daher deklarieren wir einfach eine Zahlengerade mit allen ihren Punkten zum *Skalarenbereich* und definieren wie oben die Addition durch die Addition von Vektoren, die Multiplikation über den Strahlensatz und die Anordnung durch die Lage relativ zu O und E. Dass dann Zahlbereiche herauskommen, in denen alle schon von $\mathbb{Q}$ bekannten Gesetze gelten, und dass diese alle auf die skizzierte Art miteinander identifiziert werden können, kann man geometrisch beweisen. Wir dürfen daher von dem Skalarenbereich $\mathbb{R}$ der *reellen Zahlen* sprechen. Die Multiplikation eines Skalars mit einem Vektor erklären wir (im Sinne des Strahlensatzes) wie in der Skizze und überlegen, dass das nicht von der Wahl der Zahlengeraden abhängt und dass die von der Multiplikation mit rationalen Skalaren bekannten Gesetze (V5-8) gelten.

2.6 Geraden und Ebenen

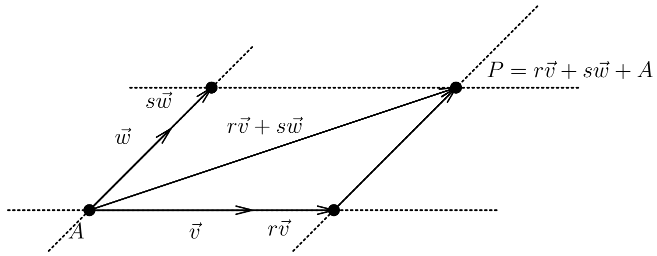
Aus der Idee der Zahlengeraden leitet sich auch die folgende *Parameterdarstellung* von Geraden und Ebenen her

- Sei g ein Gerade, A ein Punkt auf g und $\vec{v} \neq \vec{0}$ so, dass $\vec{v} + A$ auf g liegt ($\vec{v}$ heisst dann ein *Richtungsvektor* von g). Dann besteht g gerade aus den Punkten folgender Form (und diese Darstellung ist eindeutig)

$$P = r\vec{v} + A \ (r \in \mathbb{R})$$

- Sei ε eine Ebene, A ein Punkt auf ε und $\vec{v}, \vec{w}$ so, dass $A, \vec{v} + A, \vec{w} + A$ in der Ebene ε, aber nicht auf einer Geraden liegen ($\vec{v}, \vec{w}$ bilden dann ein Paar *unabhängiger Richtungsvektoren* von ε). Dann besteht ε gerade aus den Punkten folgender Form (und diese Darstellung ist eindeutig)

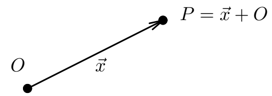
$$P = r\vec{v} + s\vec{w} + A \ (r, s \in \mathbb{R})$$



2.7 Ortsvektoren

Zeichnet man einen Punkt O aus (und nennt ihn den *Ursprung*), so entsteht eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen Punkten und Vektoren

$$P \mapsto \vec{x} = \overrightarrow{OP}, \quad \vec{x} \mapsto P = \vec{x} + O$$



Gebraucht man Vektoren in diesem Sinne, so spricht man von *Ortsvektoren.* Mit $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ geht dann die Parameterdarstellung von Geraden bzw. Ebenen über in (und es ist beliebt, das "$+O$" zu unterschlagen)

$$\vec{x} + O = r\vec{v} + \vec{a} + O, \ (r \in \mathbb{R}) \quad \text{bzw.} \quad \vec{x} + O = r\vec{v} + s\vec{v} + \vec{a} + O, \ (r, s \in \mathbb{R})$$

2.8 Vektor-Koordinaten in der Ebene

Wir beschränken uns im Moment auf eine feste Ebene. Ein Paar $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ von Vektoren heisst (linear) *unabhängig*, wenn für einen/jeden Punkt O der Ebene die Punkte O, $O+\vec{a}_1$, $O+\vec{a}_2$ nicht auf einer Geraden liegen. Damit haben wir die eindeutige (Parameter)Darstellung

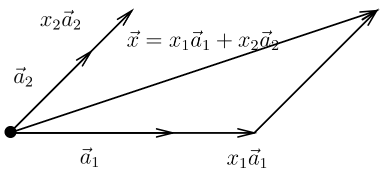
$$P = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + O \ \ (x_1, x_2 \in \mathbb{R})$$

für Punkte der Ebene und daher auch für die Vektoren

$$\vec{x} = \overrightarrow{OP} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 \ \ (x_1, x_2 \in \mathbb{R})$$

Wir sagen dann, dass $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ eine *Basis* α der Ebene bilden. Die eindeutig bestimmten Skalare x_1 und x_2 heissen die *Koordinaten* von $\vec{x}$ bzgl. α und wir schreiben

$$\vec{x}^\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

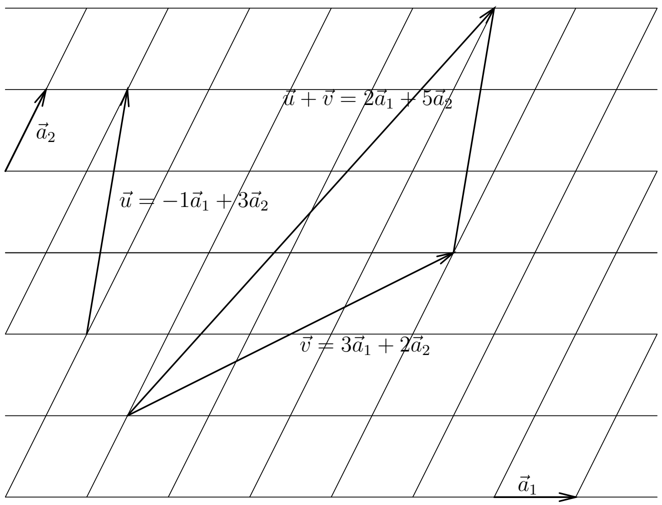


Das Rechnen mit Koordinaten geht so

$$\boxed{(\vec{x} + \vec{y})^\alpha = \vec{x}^\alpha + \vec{y}^\alpha, \quad (r\vec{x})^\alpha = r(\vec{x}^\alpha)}$$

Dabei ist für Spalten von Skalaren (*komponentenweise*) definiert

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}, \quad r\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx_1 \\ rx_2 \end{pmatrix}, \quad -\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$



Beweis. Sei $\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2$, $\vec{y} = y_1\vec{a}_1 + y_2\vec{a}_2$. Dann

$$\vec{x} + \vec{y} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + y_1\vec{a}_1 + y_2\vec{a}_2 = (x_1 + y_1)\vec{a}_1 + (x_2 + y_2)\vec{a}_2$$

$$r\vec{x} = r(x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2) = rx_1\vec{a}_1 + rx_2\vec{a}_2 \qquad \square$$

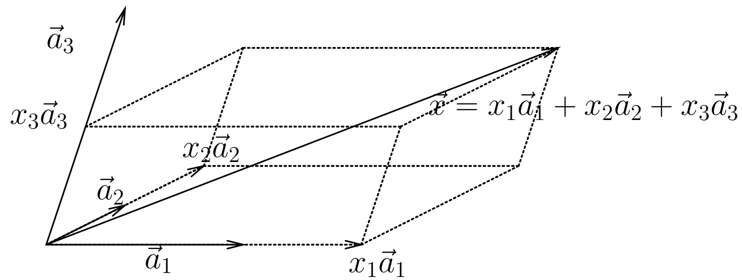
2.9 Vektor-Koordinaten im Raum

Ein Tripel $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_2$ von Vektoren im Raum heisst (linear) *unabhängig*, wenn für einen/jeden Punkt O des Raumes die Punkte O, $O + \vec{a}_1$, $O + \vec{a}_2, O + \vec{a}_3$ nicht auf einer Ebene liegen. Damit haben wir die eindeutige (Parameter)Darstellung

$$P = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 + O \quad (x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R})$$

für Punkte des Raumes und daher auch für die Vektoren

$$\vec{x} = \overrightarrow{OP} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 \quad (x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R})$$



Wir sagen dann, dass $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ eine *Basis* α des Raumes bilden. Die eindeutig bestimmten Skalare x_1, x_2, x_3 heissen die *Koordinaten* von $\vec{x}$ bzgl. α und wir schreiben

$$\vec{x}^\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Das Rechnen mit Koordinaten geht wieder *komponentenweise*

$$(\vec{x} + \vec{y})^\alpha = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} = \vec{x}^\alpha + \vec{y}^\alpha, \quad (r\vec{x})^\alpha = \begin{pmatrix} rx_1 \\ rx_2 \\ rx_3 \end{pmatrix} = r\vec{x}^\alpha$$

2.10 Punkt-Koordinaten

Zeichnet man in einer Ebene bzw. im Raum einen Punkt O (Urpsrung) aus, so kann man (wie wir gesehen haben) Punkte durch (Orts)Vektoren bezeichnen

$$P = \vec{x} + O, \quad \vec{x} = \overrightarrow{OP}$$

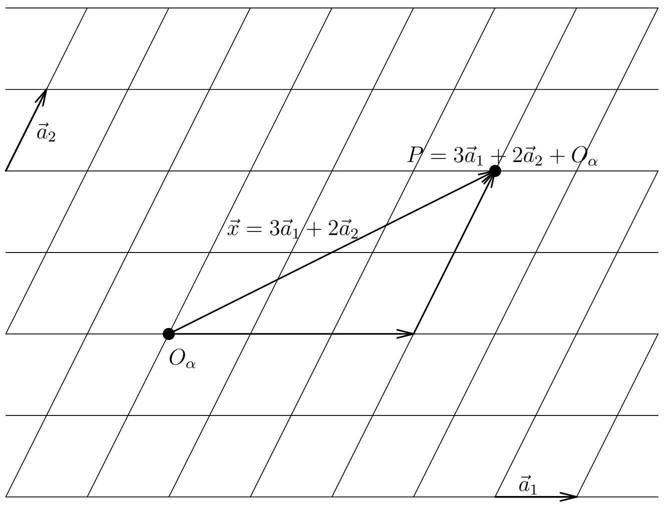
Hat man zusätzlich eine Basis $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ so erhält man ein (affines) *Koordinatensytem* α mit Urspung $O_\alpha = O$ und kann die Koordinaten von P so einführen

$$P^\alpha = \vec{x}^\alpha \quad \text{mit } \vec{x} = \overrightarrow{OP}$$

3 Logischer Diskurs

3.1 Axiomatische Methode

Aufgabe der Mathematik ist es, aus der Erfahrungswelt, insbesondere Naturwissenschaft und Technik (die Finanzen sollte sie besser meiden, um nicht selbst ein Multiplikator des Wahns zu werden) stammende Strukturen zu beschreiben und aufzuzeigen, wie aus diesen Beschreibungen Folgerungen gezogen werden können hin bis zu konkreten Berechnungen. Die Strukturen, mit denen wir es in dieser Vorlesung zu tun haben, sind einerseits die Zahlbereiche, andererseits die Räume der elementaren Geometrie (auch in höheren endlichen Dimensionen) oder Verallgemeinerungen.



$$P^\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Beschreibung erfolgt (zwangsläufig) in idealisierter Form: Es werden die Grundbegriffe und -operationen benannt und dann die wichtigsten direkt einsehbaren Beziehungen zwischen ihnen bzw. des Regeln des Umgangs mit ihnen in *Axiomen* oder *Postulaten* festgehalten. Aus diesen Axiomen ist dann alles Weitere durch logisches Schließen herzuleiten. Die Ergebnisse sind dann bewiesene *Sätze* und *Theoreme* (wichtige Sätze) und *Algorithmen*, deren Korrektheit bewiesen ist.

Da eine lückenlose Herleitung in vielen Fällen für einen mathematische Grundkurs weder möglich noch angemessen ist, werden wir wichtige Aussagen, bei denen wir statt eines Beweises nur eine Motivation angeben können, als *Prinzipien* formulieren - sie haben für uns also die Rolle von Axiomen. Einen Satz von eher technischer Natur nennt man *Lemma*, einen der leicht aus dem Vorangehenden folgt *Korollar*.

3.2 Aussagenlogische Verknüpfungen

Die Bedeutung der aussagenlogischen Verknüpfungen: *Und, Oder, Nicht, Entweder-Oder* (*Exor*) kennen Sie vom Logischen Entwurf. Hier bedeutet

W ‘trifft in dem gegebenen Zusammenhang zu’

F ‘trifft in dem gegebenen Zusammenhang nicht zu’

und	W	F
W	W	F
F	F	F

oder	W	F
W	W	W
F	W	F

nicht	
W	F
F	W

Exor	W	F
W	F	W
F	W	F

Von besonderer Wichtigkeit in mathematischen Diskurs sind die Verknüpfungen

- $A \Rightarrow B$, lies: Wenn A dann B, A impliziert B, B folgt aus A, A ist hinreichend für B, B ist notwendig für A
- $A \Leftrightarrow B$, lies: Genau dann A wenn B, A und B sind zueinander äquivalent, A ist hinreichend und notwendig für B

$\Rightarrow$	W	F
W	W	F
F	W	W

$\Leftrightarrow$	W	F
W	W	F
F	F	W

3.3 Aussagenlogische Schlussregeln

Was ein erlaubter Schluss in einem mathematischen Diskurs ist, hängt von der Erfahrung und Kennntis der Teilnehmer über das betreffende Thema ab. Grundsätzlich sollte sich jeder Schluss auf die Axiome des Gebiets und unmittelbar einsichtige rein logische Schlussregeln gründen. Die für die Praxis wichtigsten aussagenlogischen Schlussregen bzw. Beweismuster seien hier benannt

- Aus $A \Rightarrow B$ und A darf man auf B schließen
- Um $A \Rightarrow B$ zu beweisen, leite man B aus der Annahme A her
- Um Nicht-A zu beweisen, leite man aus der Annahme A einen Widerspruch her.
- A kann man dadurch beweisen, dass man aus den Annahme Nicht-A einen Widerspruch herleitet (*indirekter Beweis, Widerspruchsbeweis*)
- $A \Rightarrow B$ kann man dadurch beweisen, dass man Nicht-A aus der Annahme Nicht-B herleitet (*Kontraposition*)
- Hat man B sowohl aus A_1 wie aus A_2 herleitetm, so kann man aus A_1-Oder-A_2 auf B schließen. (*Fallunterscheidung*)

3.4 Quantoren

Die Bedeutung der Quantoren entspricht dem umgangssprachlichen Gebrauch

- *Für alle x gilt* $A(x)$ - $\forall x\ A(x)$: Für alle c aus dem betrachteten Bereich trifft $A(c)$ in dem gegebenen Zusammenhang zu
- *Es gibt x mit* $A(x)$ - $\exists x\ A(x)$ Es gibt mindesten ein c in dem betrachteten Bereich so, das $A(c)$ in dem gegebenen Zusammenhang zutrifft.
- *Es gibt genau ein x mit* $A(x)$ - $\exists! x\ A(x)$ oder $\exists^1\ A(x)$.

Dazu gehören die Schlussweisen

- Gilt in einem gegebenen Zusammenhang ‘Für alle x: $A(x)$’, so darf man auf $A(c)$ für jedes c in dem betrachteten Bereich schließen

- Um 'Für alle x: $A(x)$' in einem gegebenen Zusammenhang zu beweisen, betrachte man ein *festes aber beliebiges* c in dem gegebenen Bereich und weise für dieses $A(c)$ nach.
- Dass 'Es gibt ein x mit $A(x)$' in einem gegebenen Zusammenhang gilt, kann (und wenn möglich sollte) dadurch bewiesen werden, dass man ein c in dem betrachteten Bereich *aufzeigt* (oder konstruiert), für welches $A(c)$ gilt.
- Gilt in einem gegebenen Zusammenhang 'Es gibt ein x mit $A(x)$', so darf man einen Namen, z.B. c, für einen *Zeugen* in dem betrachteten Bereich einführen und die Aussage $A(c)$ in der weiteren Argumentation benutzen

3.5 Terme und identitätslogische Schlüsse

Aus der Schule kennen Sie arithmetische Terme, aus dem Logischen Entwurf Boolesche Terme. Sie wissen, wie man Terme t nach gegebenen Regeln umformt. Klar ist, dass $t = t$ immer gilt und dass aus $t = s$ auch $s = t$ folgt.

- Aus $t = s$ und $s = r$ darf man auf $t = r$ schliessen
- Aus $t = s$ und $A(t)$ darf man auf $A(s)$ schließen
- Aus $t = s$ darf man auf $u = u'$ schliessen, wobei u' aus u hervorgeht, indem man in u ein oder mehrere Vorkommen des Teilterms t durch s ersetzt.

Geht t_{i+1} aus t_i jeweils durch Ersetzung von Teiltermen nach der dritten Regel hevor, so schreibt man

$$t_1 = t_2 = \ldots = t_k$$

3.6 Mengen und Strukturen

Die Gegenstandsbereiche der Mathematik werden meist als *Grund-Mengen* M mit Struktur gesehen, z.B. die natürlichen Zahlen als

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

mit der Konstanten 0 und der Nachfolgeroperation. Die Individuen c aus einem solchen Bereich M heissen dann auch *Elemente* vom M und man schreibt $c \in M$. Also $42 \in \mathbb{N}_0$ aber $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}_0$.

Die Natur der Elemente ist dabei irrelevant, die Notation sekundär. Also ist Nichts einzuwenden gegen

$$\mathbb{N}_0 = \{nullum, I, II, III, IV, \ldots\}$$

Die Notation ergibt sich immer erst aus dem Verständnis der Struktur und kann mehr oder weniger praktisch sein.

Da die Natur der Elemente irrelevant ist und etwa bei $\mathbb{N}_0$ (und den weiteren Zahlbereichen) nicht auf logisch konsistente Weise zu fixieren ist, ist es im Grunde nicht legitim, von <u>der</u> Menge der natürlichen Zahhlen zu reden. Fasst man $\mathbb{N}_0$ jedoch als eine Struktur auf, die den angegebenen Axiomen genügt, so kann man (ohne große Anstrengung) zeigen,

dass $\mathbb{N}_0$ dadurch bis auf *Isomorphie* eindeutig bestimmt ist: Sind $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{N}_0'$ zwei solche Strukturen, so gibt es eine umkehrbar eindeutige Zuordnung ϕ der Elemente von $\mathbb{N}_0$ zu den Elementen von $\mathbb{N}_0'$ so, dass $\phi(0)$ die Null von $\mathbb{N}_0'$ ist und, für jedes $x \in \mathbb{N}_0$, $\phi(x+1)$ der Nachfolger von $\phi(x)$ in $\mathbb{N}_0'$.

Damit ist es doch wieder erlaubt, von <u>den</u> natürlichen Zahlen und ihrer Gesamtheit $\mathbb{N}_0$ zu sprechen und das lässt sich entsprechend auf $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ausdehnen. Ebenso für die n-dimensionalen Räume der Elementargeometrie, $n = 2, 3, \ldots$. Anders verhält es sich, wenn wir von *beliebigen* Körpern oder Vektorräumen sprechen. Dann ist in der Tat nur eine Grund-Menge zusammen mit einer den Axiomen genügenden Struktur zu denken.

3.7 Teilmengen, Paare und Relationen

Für eine Menge M haben wir die Notation $c \in M$ (c ist *Element* von M) und $c \notin M$ (c ist kein Element von M) eingeführt. Ist N eine Menge so, dass $c \in M$ für alle $c \in N$ gilt, so ist N *Teilmenge* von M und wir schreiben $N \subseteq M$. Zwei Mengen M und N sind *gleich*, wir schreiben $M = N$, wenn sie dieselben Elemente haben, also

$$M = N \;\Leftrightarrow\; N \subseteq M \text{ und } M \subseteq N.$$

Sind $c_1, \ldots, c_n$ irgendwelche Objekte, so können wir die endliche Menge

$$\{c_1, \ldots, c_n\}$$

bilden. Hat M eine Struktur und ist $A(x)$ eine Formel, die sich auf diese bezieht, so erhalten wir die Teilmenge

$$\{c \in M \mid A(c)\} \subseteq M$$

Insbesondere ergibt sich so die *Schnittmenge*

$$M \cap N = \{c \mid c \in M \text{ und } c \in N\}$$

Mehr Mut braucht's für die *Vereinigungsmenge* $M \cup N$, die gerade aus den c besteht, für die $c \in M$ oder $c \in N$ gilt. Aus zwei Objekten c, d können wir das *geordnete Paar* (c, d) bilden (man kann eine Konstruktion angeben, die nur die Bildung endlicher Mengen benutzt) so, dass gilt

$$(c, d) = (c', d') \;\Leftrightarrow\; c = c' \text{ und } d = d'$$

Sind M und N Mengen, so ist auch

$$M \times N = \{(c, d) \mid c \in M,\ d \in N\}$$

eine Menge, das *kartesische* oder *direkte Produkt*. Wir schreiben $M \times M = M^2$. Jede Relation zwischen M und N , können wir als Teilmenge von $M \times N$ auffassen, z.B. die Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}$ als

$$\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a < b\}$$

Einem elektrischen Netz können wir als eine relationale Struktur auffassen, deren Grund-Menge die Menge der Knoten ist, wobei zwei Knoten in Relation stehen, wenn sie durch einen Zweig direkt verbunden sind. Diese Relation ist zunächst symmetrisch, d.h. man hat einen *ungerichteten Graphen* mit ungerichteten Kanten. Eine unsymmetrische Relation und ein *gerichteter Graph* ergibt sich, wenn man die Zweigrichtungen vorschreibt. Von diesem Typ sind auch die binären Entscheidungsgraphen, man kann sie aber auch als Mengen mit einer partiellen Ordnung verstehen, etwa $k > l$ wenn es einen gerichteten Pfad von k nach l gibt.

3.8 Abbildungen und Operationen

Eine Relation $R \subseteq M \times N$ definiert eine *Abbildung* ϕ von M nach N, falls es

- zu jedem $a \in M$ genau ein $b \in N$ gibt mit $(a, b) \in R$ - wir schreiben $a \mapsto b = \phi(a)$

Dann schreibt man auch $\phi : M \to N$ und nennt $\{(a, \phi(a)) \mid a \in M\}$ den *Graphen* der Abbildung ϕ. $b = \phi(a)$ heisst das *Bild* von a unter ϕ. Der wichtigste Punkt ist die *Wohldefiniertheit*: dass es zu jedem $a \in M$ höchstens ein $b \in N$ gibt mit $(a, b) \in R$.

Eine *einstellige Operation* auf einer Menge M ist eine Abbildung $\phi : M \to M$, z.B. die Nachfolgeroperation auf $\mathbb{N}_0$, die Operation $a \mapsto -a$ auf $\mathbb{Z}$ oder $\vec{a} \mapsto -\vec{a}$ auf der Menge der Vektoren des Raums.

Eine *zweistellige* oder *binäre* Operation auf einer Menge M ist eine Abbildung $\phi : M^2 \to M$, z.B. die Addition und die Multiplikation auf $\mathbb{Q}$ oder einem anderen Körper und die Addition von Vektoren.

Jeder Term $t(x_1, \ldots, x_n)$ in n Variablen definiert auf einer Struktur entsprechenden Typs eine n-stellige Operation

$$(a_1, \ldots, a_n) \mapsto t(a_1, \ldots, a_n)$$

z.B. ein Boolescher Term eine Booleschen Funktion auf $\{0, 1\}$.

3.9 Spalten

Das Konstrukt 'geordnetes Paar' können wir verallgemeinern zum Konstrukt *n-Tupel*, das wir vorzugsweise als *n-Spalte* schreiben

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = y_1 \text{ und } \ldots \text{ und } x_n = y_n$$

Das geht z.B. rekursiv

$$\begin{pmatrix} x_1 \end{pmatrix} = x_1, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}, x_n).$$

K^n besteht aus den n-Spalten mit Einträgen in K

$$K^n = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1 \in K \text{ und } \ldots \text{ und } x_n \in K\}$$

Ist K ein Körper, so erklären wir komponentenweise Addition und Multiplikation mit Skalaren

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad r \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx_1 \\ \vdots \\ rx_n \end{pmatrix}$$

3.10 Folgen

Gegeben $N \subseteq \mathbb{N}_0$ und eine Abbildung $\phi : N \to M$, können wir die so notieren

$$\phi = (a_n)_{n \in N}, \quad \text{wobei } a_n = \phi(n)$$

Man spricht dann auch von einer *Folge* von Elementen aus M. Ist N endlich, so spricht man von einer *endlichen Folge* und im Falle $N = \{1, \ldots, n\}$ kann man diese als n-Tupel verstehen.

3.11 Axiom der bedingten Auswahl

Auf der Menge M sei eine Relation R gegeben so, dass gilt

- Zu jeden $a \in M$ gibt es $b \in M$ mit $(a, b) \in R$.
- Dann gibt es zu jedem $c \in M$ eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ so, dass

$$a_0 = c, \quad a_n \in M \quad \text{und} \quad (a_n, a_{n+1}) \in R \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

Beispiel. Ist M eine nach oben unbeschränkte nichtleere Menge reeller Zahlen (d.h. es gibt kein s so, dass $x \leq s$ für alle $x \in M$), so gibt es eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ so, $a_n \in M$ und dass $a_n + 1 < a_{n+1}$ für alle n. Beweis. Für $a, b \in M$ setze $(a, b) \in R \Leftrightarrow a + 1 < b$. Gäbe es zu $a \in M$ kein b mit $(a, b) \in R$, so wäre $x \leq s = a + 1$ für alle $x \in M$.

4 Lineare Gleichungen

4.1 Motivation

Seien $x_1, \ldots, x_n$ Grössen, die als Werte reelle Zahlen annehmen - z.B. physikalische, technische oder ökonomische Grössen. Eine *lineare Gleichung*

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b, \quad a_1, \ldots, a_n, b \text{ feste reelle Zahlen}$$

in den *Variablen, Unbekannten* oder *Unbestimmten* $x_1, \ldots, x_n$ drückt einen Zusammenhang (sehr einfacher Form) zwischen diesen Grössen in impliziter Form aus. Häufig ersetzt man eigentlich kompliziertere Zusammenhänge näherungsweise durch lineare.
Beispiel: mit der Spannung U, der Stromstärke I und konstantem Widerstand R hat man das Ohmsche Gesetz in der Form $1U - RI = 0$. Man kann natürlich diese Gleichung nach U oder I auflösen und erhält mit $U = RI$ die Spannung in (linearer) Abhängigkeit von der Stromstärke, mit $I = \frac{1}{R}U$ die Stromstärke in (linearer) Abhängigkeit von der Spannung.

4.2 Beispiel

Bei der Hintereinanderschaltung zweier (bekannter) Widerstände $R_1 = 40$ und $R_2 = 70$ mit den (unbekannten) Spannungen U_1 und U_2 und der (unbekannten) Stromstärke $I = I_1 = I_2$ und der Netzspannung 220 hat man das Gleichungssystem (1),(2),(3) und durch Umformen das gleichwertige Gleichungssystem $(1), (2'), (3'')$:

$$\begin{array}{llllll} (1) & U_1 & +U_2 & & = 220 \\ (2) & U_1 & & -40I & = 0 \\ (3) & & U_2 & -70I & = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{llllll} (1) & U_1 & +U_2 & & = 220 \\ (2') = (2) - (1) & & -U_2 & -40I & = -220 \\ (3'') = (3) + (2') & & & -110I & = -220 \end{array}$$

Hieraus erhält man sofort die eindeutig bestimmte Lösung $I = 2, U_2 = 140, U_1 = 80$. Ist der Widerstand R_2 nicht bekannt, so hat man nur noch das (unterbestimmte) Gleichungssystem (1),(2) bzw. (1),(2'); hier erhält man nun nicht mehr eine eindeutig bestimmte Lösung in Zahlenwerten, statt dessen versucht man die Abhängigkeiten zwischen den Grössen in direkter (und für den Anwendungszweck geeigneter) Weise anzugeben, z.B.: in Abhängigkeit von frei zu wählendem I hat man $U_2 = 220 - 40I$ und $U_1 = 40I$; genausogut könnte man I und U_2 in U_1 oder I und U_1 in U_2 ausdrücken. Kennt man keinen der beiden Widerstände,so bleibt nur die Gleichung (1) und man hat $U_1 = 220 - U_2$ bei frei zu wählenden I und U_2 bzw. $U_2 = 220 - U_1$ bei frei zu wählenden I und U_1 . Wollte man umgekehrt zu den Gleichungen (1)-(3) etwa noch (4): $U_1 - U_2 = 0$ hinzunehmen, so hätte man ein überbestimmtes Gleichungssystem, das keine Lösung erlaubt. Dies liegt aber nicht ausschliesslich daran, dass man dann mehr Gleichungen als Variablen hat - so könnte man z.B. durchaus $7U_1 - 4U_2 = 0$ als vierte Gleichung nehmen und immer noch obige Lösung erhalten.

4.3 Lineare Gleichungen in 3 Variablen

Hier liegt es nahe die Grössen x_1, x_2, x_3 als die Koordinaten von Punkten/Ortsvektoren $\vec{x}$ bezüglich eines festen orthonormalen Koordinatenssystems zu verstehen. Eine einzelne *Lösung* einer gegebenen linearen Gleichung

$$(1) \quad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$$

ist also ein Tripel

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

von reellen Zahlen, das eben dieser Bedingung (1) genügt. Gesucht ist die Gesamtheit L aller dieser Lösungen. Ist z.B. $a_1 \neq 0$, so kann man $x_2 = r$ und $x_3 = s$ als freie Parameter beliebig über $\mathbb{R}$ variieren lassen und löst (1) nach x_1 auf:

$$x_1 = \frac{b}{a_1} - \frac{a_2}{a_1}r - \frac{a_3}{a_1}s$$

d.h. die Lösungen sind gerade die Spalten $\boldsymbol{x}$ von der Gestalt

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{a_1} - \frac{a_2}{a_1}r - \frac{a_3}{a_1}s \\ r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{a_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -\frac{a_2}{a_1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\frac{a_3}{a_1} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad r, s \text{ in } \mathbb{R}.$$

Dahinter steckt also die Parameterdarstellung einer Ebene E im Raum. Deren Koordinatenspalten bilden den *Lösungsraum* von (1). Der Vektor $\vec{n}$ mit Koordinaten a_1, a_2, a_3 ist ein *Normalenvektor* für E.

Entsprechend kann man für $a_2 \neq 0$ bzw. $a_3 \neq 0$ verfahren. Ist $a_1 = 0$, so muss man x_1 als einen der freien Parameter wählen, kommt dann doch x_1 de facto in der Gleichung (1) gar nicht vor. In dem *entarteten* Fall $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ hat man entweder gar keine Lösung (falls $b \neq 0$) oder den ganz $\mathbb{R}^3$ als Lösungsraum (falls $b = 0$). Hat man zwei nichtentartete Gleichungen

$$(1)\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \quad (2)\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

mit den zugehörigen "Lösungs"Ebenen E_1 und E_2 und Normalenvektoren $\vec{n}_1, \vec{n}_2$, so entspricht der Lösungsraum L des Systems (S) bestehend aus (1) und (2) gerade der Schnitt dieser beiden Ebenen. Drei Fälle sind möglich.

1.Fall. E_1 und E_2 sind nicht parallel, schneiden sich also in einer Geraden $g \hat{=} L$. Die Normalenvektoren $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ liegen nicht auf derselben Geraden.

2.Fall. $E_1 = E_2 \hat{=} L$.

3.Fall. E_1 und E_2 sind parallel, aber verschieden: keine Lösung.

Besteht das System (S) aus (1),(2) und der zusätzlichen Gleichung

$$(3)\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

mit "Lösungs"Ebene E_3 und Normalenvektor $\vec{n}_3$, so entspricht der Lösungsraum L dem Schnitt der drei Ebenen E_1, E_2, E_3 und es sind vier Fälle möglich (vgl, Fig.6.1):

1.Fall. $E_1 = E_2 = E_3 \hat{=} L$, hier liegen $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ auf einer Geraden.

2.Fall. Zwei der Ebenen schneiden sich in einer Geraden g, die dritte Ebene enthält g, $L \hat{=} g$. Je zwei der Normalenvektoren spannen dieselbe Ebene auf.

3.Fall. Zwei der Ebenen schneiden sich in in einer Geraden g, die dritte Ebene ist nicht zu g parallel, schneidet also g in einem Punkt P und $L \hat{=} \{P\}$. Die Vektoren $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ liegen nicht in einer Ebene.

4.Fall. Zwei der Ebenen sind parallel aber verschieden; oder zwei der Ebenen schneiden sich in einer Geraden g, die dritte Ebene ist zu g parallel, enthält g aber nicht : keine Lösung. Die Normalenvektoren liegen wie in Fall 1 bzw. Fall 2.

4.4 Umformung

Sei $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ oder ein anderer Körper. Sei ein lineares Gleichungssystems (S) gegeben durch m Gleichungen in n Variablen:

$$\begin{array}{cccccc} (1) & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \dots & a_{1j}x_j + & \dots & +a_{1n}x_n = b_1 \\ (2) & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \dots & a_{2j}x_j + & \dots & +a_{2n}x_n = b_2 \\ : & : & : & : & : & : \\ (i) & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + & \dots & a_{ij}x_j + & \dots & +a_{in}x_n = b_i \\ : & : & : & : & : & : \\ (m) & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + & \dots & a_{mj}x_j + & \dots & +a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

wobei die a_{ij} jeweils feste Zahlen aus K sind und die *linke Seite* bzw. die *Koeffizientenmatrix* (a_{ij}) bilden. Die b_i sind ebenfalls feste Zahlen und bilden die *rechte Seite*. Nimmt man die Spalte der b_i zu (a_{ij}) hinzu, so spricht man von der *erweiterten Koeffizientenmatrix*. Eine Spalte

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$$

ist eine *Lösung* von (S), wenn sie alle Gleichungen $(1) - (m)$ erfüllt (wir sehen hier entsprechend der Tradition die x_i einmal als Variable, andermal als Elemente von K). Die Aufgabe, "das Gleichungsystem (S) zu lösen", bedeutet die Gesamtheit aller Lösungen, den *Lösungsraum* L von (S), möglichst explizit anzugeben. Im Extremfall besteht diese in der Angabe eines einzigen Lösungsspalte oder in der Mitteilung "unlösbar"

Definition. Eine *elementare Umformung* des Gleichungssystems S in das neue Gleichungssystem $(S') : (1') - (m')$ kann erfolgen durch:
(G1) Subtraktion eines Vielfachen einer Gleichung (k) von einer anderen, (l):

$$(l') = (l) - r(k)\ (a_{l1} - ra_{k1})x_1 + \cdots + (a_{ln} - ra_{kn})x_n = b_l - rb_k,$$

(G2) Vertauschen der beiden Gleichungen (k) und (l)
(G3) Multiplikation einer Gleichung (k) mit $r \neq 0$ aus K

$$(k') = ra_{k1}x_1 + \ldots + ra_{kn}x_n = rb_k, \quad .$$

Gleichungen $0x_1 + \cdots + 0x_n = 0$ können in gewissen Situationen eifach weggelassen werden.

Satz 4.1 *Geht (S') aus (S) durch elementare Umformung hervor, so (S) aus (S') durch die inverse Umformung. Insbesondere haben (S) und (S') denselben Lösungsraum.*

Beweis zu (G1).Ist $\boldsymbol{x}$ Lösung von (k) und (l), so $(a_{l1} - ra_{k1})x_1 + \cdots + (a_{ln} - ra_{kn})x_n = a_{l1}x_1 + \ldots a_{ln}x_n - (ra_{k1}x_1 + \ldots + ra_{kn}x_n) = b_l - rb_k$ also auch Lösung von (l'). Ist $\boldsymbol{x}$ Lösung von (k) und (l'), so $a_{l1}x_1 + \cdots + a_{ln}x_n = (a_{l1} - ra_{k1})x_1 + \cdots + (a_{ln} - ra_{kn})x_n + r(a_{k1} + \cdots + a_{kn}) = b_l - rb_k + rb_k = b_l$.

4.5 Drei Beispiele

Wir geben 3 Gleichungssysteme mit derselben linken Seite an. Entsprechen geben wir sie als Koeffizientenschema an.
Beispiel 1. Die letzten beiden Gleichungen des umgeformten Systems können weggelassen werden und man kann $x_5 = r$ frei wählen. Aus der dritten Gleichung folgt dann $x_4 = r$ und aus der zweiten weiterhin $x_3 = \frac{7}{2}r$. Man kann nun $x_2 = s$ ebenfalls frei wählen und erhält aus der ersten Gleichung $x_1 = -\frac{3}{2}r - 2s$. Wir haben also unendlich viele Lösungen mit zwei 'Freiheitsgraden', hier ausgedrückt durch die beiden freien Parameter $x_5 = r$, $x_4 = s$. In Spaltenform hat man

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}r - 2s \\ s \\ \frac{7}{2}r \\ r \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}r \\ 0 \\ \frac{7}{2}r \\ r \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{7}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rrrrrl|r|r||rrrrr}
x_1 & +2x_2 & -x_3 & +2x_4 & +3x_5 & =0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 2 & 3 \\
2x_1 & +4x_2 & -2x_3 & +5x_4 & +5x_5 & =0 & 1 & 3 & 2 & 4 & -2 & 5 & 5 \\
-x_1 & -2x_2 & -x_3 & +x_4 & +x_5 & =0 & 1 & 1 & -1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\
2x_1 & +4x_2 & & +2x_4 & +x_5 & =0 & 1 & 1 & 2 & 4 & 0 & 2 & 1 \\
3x_1 & +6x_2 & -3x_3 & +7x_4 & +8x_5 & =0 & 1 & 4 & 3 & 6 & -3 & 7 & 8
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrl|r|r||rrrrr}
x_1 & +2x_2 & -x_3 & +2x_4 & +3x_5 & =0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 2 & 3 \\
 & & & x_4 & -x_5 & =0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 & & -2x_3 & +3x_4 & +4x_5 & =0 & 2 & 2 & 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \\
 & & 2x_3 & -2x_4 & -5x_5 & =0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & -2 & -5 \\
 & & & x_4 & -x_5 & =0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrl|r|r||rrrrr}
x_1 & +2x_2 & -x_3 & +2x_4 & +3x_5 & =0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 2 & 3 \\
 & & -2x_3 & +3x_4 & +4x_5 & =0 & 2 & 2 & 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \\
 & & & x_4 & -x_5 & =0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 & & 2x_3 & -2x_4 & -5x_5 & =0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & -2 & -5 \\
 & & & x_4 & -x_5 & =0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrl|r|r||rrrrr}
x_1 & +2x_2 & -x_3 & +2x_4 & +3x_5 & =0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 2 & 3 \\
 & & -2x_3 & +3x_4 & +4x_5 & =0 & 2 & 2 & 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \\
 & & & x_4 & -x_5 & =0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 & & & x_4 & -x_5 & =0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 & & & x_4 & -x_5 & =0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrl|r|r||rrrrr}
x_1 & +2x_2 & -x_3 & +2x_4 & +3x_5 & =0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 2 & 3 \\
 & & -2x_3 & +3x_4 & +4x_5 & =0 & 2 & 2 & 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \\
 & & & x_4 & -x_5 & =0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 & & & & 0 & =0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & =0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

also Lösungsraum

$$L : \boldsymbol{x} = r\boldsymbol{v} + s\boldsymbol{w}, \quad r, s \text{ in } K \text{ (beliebig) mit } \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{7}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Spalten $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ bilden ein "Fundamentalsystem" von Lösungen für das *homogene* Gleichungssystem (S), die *allgemeine Lösung* $\boldsymbol{x}$ von (S) lässt sich daraus wie oben in Parametern, hier r, s, darstellen.

Beispiel 2. Die fünfte Gleichung des umgeformten Systems ergibt $0 = 1$, also gibt es dann keine Lösung.

Beispiel 3. Im umgeformten System sind die letzten beiden Gleichungen von der Form $0 = 0$, können also weggelassen werden. Wie in Beispiel 1 können wir $x_5 = r$ frei wählen und erhalten dann aus der dritten Gleichung $x_4 = 1+r$. Eingesetzt in die zweite Gleichung ergibt sich $x_3 = \frac{1}{2} + \frac{7}{2}r$. Nun ist $x_2 = s$ wieder frei wählbar und $x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}r - 2s$ aus der ersten Gleichung. In Spaltenform

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}r - 2s \\ s \\ \frac{1}{2} + \frac{7}{2}r \\ 1 + r \\ r \end{pmatrix} = \boldsymbol{a} + r\boldsymbol{v} + s\boldsymbol{w} \text{ mit } \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ aus Beispiel 1. Der Lösungsraum des Gleichungssystems (S) , bzw. die allgemeine Lösung lässt sich also so angeben:

$$L : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + r\boldsymbol{v} + s\boldsymbol{w} \text{ mit } r, s \text{ in } K.$$

Bezeichnet man das System aus Beispiel 1 als das zu (S) gehörige homogene System (S_h), seine allgemeine Lösung mit $\boldsymbol{x}_h$ und nennt man $\boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{a}$ eine *spezielle* Lösung, so hat man $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_s + \boldsymbol{x}_h$.

4.6 Stufenform

Für einen Term $0x_i$ im Gleichungssystem dürfen wir auch 0 oder gar nichts schreiben. Ein Gleichungssystem (S) ist *homogen*, falls $b_1 = \ldots = b_m = 0$. Das System (S_h), in dem jedes b_i durch 0 ersetzt wird, heisst das *homogene* System zu (S). Ein Gleichungssystem (S) in *Stufenform* ist von der Gestalt

$$\begin{array}{cccccl}
0x_1 + \ldots & |\underline{a_{1j_1}x_{j_1} + \ldots} & a_{1j_2}x_{j_2} + \ldots & a_{1j_i}x_{j_i} + \ldots & a_{1j_r}x_{j_r} + \ldots + a_{1n}x_n = & b_1 \\
 & & |\underline{a_{2j_2}x_{j_2} + \ldots} & a_{2j_i}x_{j_i} + \ldots & a_{2j_r}x_{j_r} + \ldots + a_{2n}x_n = & b_2 \\
 & & & |\underline{a_{3j_3}x_{j_3} + \ldots} & a_{3j_r}x_{j_r} + \ldots + a_{3n}x_n = & b_3 \\
 & & & & |\underline{a_{rj_r}x_{j_r} + \ldots + a_{rn}x_n} = & b_r \\
 & & & & 0 = & b_{r+1} \\
 & & & & \vdots & \\
 & & & & 0 = & b_m
\end{array}$$

mit Zahlen $a_{ij_i} \neq 0$ rechts neben den Stufenkanten, den *Pivots*. Die entsprechenden Variablen x_{j_i} heissen *Pivotvariable*. r heisst der *Rang* des Systems - die Eindeutigkeit werden wir später beweisen. Für $r = m$ hat man keine Gleichungen $0 = b_l$, für $r = 0$ hat man nur solche.

Scholion. Sei (S) ein stufenförmiges System von m linearen Gleichungen in n Variablen $x_1, \ldots, x_n$ mit Koeffizienten in einem Körper K.

a) (S) ist unlösbar genau dann, es mindestens eine Gleichung von der Form $0 = b_l$, $r < l \leq m$, mit einer Zahl $b_l \neq 0$ enthält. Ein homogenes System ist stets lösbar, es hat mindestens die *triviale Lösung* $\mathbf{0}$.

b) Ist (S) lösbar, so hat (S) eine eindeutig bestimmte Lösung $\boldsymbol{x}$ genau dann, wenn $r = n$, d.h. wenn die Pivots gerade die 'Diagonalkoeffizienten' a_{ii} sind:

$$\begin{array}{cccccc}
a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \ldots & a_{1i}x_i + & \ldots & a_{1n}x_n = b_1 \\
 & a_{22}x_2 + & \ldots & a_{2i}x_i + & \ldots & a_{2n}x_n = b_2 \\
 & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & a_{ii}x_i + & \ldots & a_{in}x_n = b_i \\
 & & & & \ddots & \vdots \\
 & & & & & a_{nn}x_n = b_n \\
 & & & & & 0 = 0 \\
 & & & & & \vdots \\
 & & & & & 0 = 0
\end{array}$$

Man erhält die Lösung durch Rücksubstitution:

$$x_n = \frac{1}{a_{nn}} b_{nn}, \quad x_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1,n-1}} (b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n), \ldots.$$

Bei einem homogenen System ist diese eindeutige Lösung dann $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, die triviale Lösung.

c) Ist (S) lösbar, so gilt $r \leq n$ und man hat

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{1j_1}x_{j_1} + & \ldots & a_{1j_2}x_{j_2} + & \ldots & a_{1j_i}x_{j_i} + & \ldots & a_{1j_r}x_{j_r} + & \ldots & +a_{1n}x_n = b_1 \\
 & & a_{2j_2}x_{j_2} + & \ldots & a_{2j_i}x_{j_i} + & \ldots & a_{2j_r}x_{j_r} + & \ldots & +a_{2n}x_n = b_2 \\
 & & & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & a_{ij_i}x_{j_i} + & \ldots & a_{ij_r}x_{j_r} + & \ldots & +a_{in}x_n = b_i \\
 & & & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & a_{rj_r}x_{j_r} + & \ldots & +a_{rn}x_n = b_r \\
 & & & & & & & & 0 = 0 \\
 & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & 0 = 0
\end{array}$$

Man kann in der Darstellung der allgemeinen Lösung $\boldsymbol{x}$ die Nichtpivotvariablen x_j als freie Parameter r_j wählen, d.h. man hat $n - r$ Freiheitsgrade. Für die Pivotvariablen x_{j_i} erhält man jeweils eine Darstellung in den freien Parametern, indem man, von unten nach oben fortschreitend, die Gleichung

$$x_{j_i} = \frac{1}{a_{i,j_i}} (b_i - a_{i,j_i+1}x_{j_i+1} - \ldots - a_{in}x_n)$$

und die schon berechneten Darstellungen benutzt.

d) Ein "kanonisches Fundamentalsystem" von $n - r$ Lösungen

$$\boldsymbol{v}_j, \quad j = 1, \ldots n, \ j \neq j_1, \ldots, j_r$$

für das homogene System (S_h) erhält man, indem man jeweils setzt

$$v_{jj} = \lambda_j = 1, \ v_{kj} = \lambda_k = 0 \text{ für alle anderen freien Parameter}$$

und die restlichen Komponenten v_{kj} von $\boldsymbol{v}_j$, d.h. die Werte der Pivotvariablen, von unten nach oben vorgehend, aus dem Gleichungssystem bestimmt. Dazu braucht man nur die

Gleichungen ab der 'Stufe (l), auf der x_j steht' ($j_l < j < j_{l+1}$) aufwärts, und kann alle Nichtpivotvariablen ausser x_j vergessen. Aus der i-ten Gleichung erhält man

$$v_{j_i j} = -\frac{1}{a_{ij_i}}(a_{ij} + a_{ij_{i+1}} v_{j_{i+1} j} + \ldots + a_{ij_l} v_{j_l j}).$$

e) Die allgemeine Lösung des Systems (S) (bzw. jede Lösung) erhält man aus einer *speziellen* Lösung $\boldsymbol{x}_s$ von (S) und der allgemeinen Lösung $\boldsymbol{x}_h$ des homogenen Systems (S_h) als

$$\boldsymbol{x} \;=\; \boldsymbol{x}_s + \boldsymbol{x}_h \;=\; \boldsymbol{x}_s + \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \lambda_{n-r} \boldsymbol{v}_{n-r}, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r} \text{ in } K \text{ (beliebig)}$$

wobei $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-r}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen des homogenen Systems (S_h) nach d) ist. Eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems (S) erhält man, indem man alle freien Parameter $= 0$ setzt und von unter her auflöst vgl. c).

Beweis: a)-d) Durch Inspektion. e) und die Struktur des Lösungsraum diskutieren wir, sobald die benötigten Begriffe eingeführt sind.

4.7 Matrizen

Wir wollen eine kompaktere Notation für Gleichungssysteme einführen. Eine $m \times n$-*Matrix*

$$A = (a^i_j) = (a^i_j)_{m \times n} = \begin{pmatrix} a^1_1 & \ldots & a^1_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a^m_1 & \ldots & a^m_n \end{pmatrix} \in K^{m \times n}$$

über K wird angegeben durch ein (rechteckiges) Schema von Zahlen (*Koeffizienten, Einträgen*) a^i_j aus K, wobei $i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$. Oder eine mit den Paaren ij indizierte Liste. Die Einträge $a^i_1, \ldots, a^i_n$ bilden die i-te *Zeile*, die Einträge $a^1_j, \ldots, a^m_j$ die j-te *Spalte*. Zeilen bzw. Spalten können demnach als Spezialfälle von Matrizen aufgefasst werden. Man lese: m kreuz n Matrix.

4.8 Matrix mal Spalte

Für eine $m \times n$ Matrix $A = (a^i_j)$ über K und eine Spalte $\boldsymbol{b}$ aus K^n wird definiert

$$A\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a^1_1 & \ldots & a^1_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a^m_1 & \ldots & a^m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1_1 b^1 + \ldots + a^1_n b^n \\ \vdots \\ a^m_1 b^1 + \ldots + a^m_n b^n \end{pmatrix} \text{ in } K^m$$

d.h. die i-te Komponente von $A\boldsymbol{b}$ erhält man, indem man die i-te Zeile von A komponentenweise mit $\boldsymbol{b}$ multipliziert und dann aufaddiert. Daher müssen die Zeilen von A genauso lang sein wie die Spalten $\boldsymbol{b}$.

b^1	$\ldots$	b^n	
a^1_1	$\ldots$	a^1_n	$a^1_1 b^1 + \ldots + a^1_n b^n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a^m_1	$\ldots$	a^m_n	$a^m_1 b^1 + \ldots + a^m_n b^n$

Aus den Regeln für das Rechnen in Körpern erhält man sofort

$$A(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = A\boldsymbol{b} + A\boldsymbol{c} \quad A(r\boldsymbol{b}) = r(A\boldsymbol{b}), \quad A\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}, \quad (A + B)\boldsymbol{c} = A\boldsymbol{c} + B\boldsymbol{c}$$

4.9 Matrixschreibweise

Ein lineares Gleichungssystem können wir nun so schreiben

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \text{mit } A \in K^{m \times n}, \; \boldsymbol{b} \in K^m, \; \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

A ist dann die *Koeffizientenmatrix* und $(A \mid \boldsymbol{b})$ die (um die rechte Seite) erweiterte Matrix des Systems.

Der Beweis von $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_h + \boldsymbol{x}_s$ geht nun ganz bequem. Ist $A\boldsymbol{x}_h = \boldsymbol{0}$ und $A\boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{b}$, so folgt für $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_h + \boldsymbol{x}_s$, dass

$$A\boldsymbol{x} = A(\boldsymbol{x}_h + \boldsymbol{x}_s) = A\boldsymbol{x}_h + A\boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}.$$

Sind $\boldsymbol{x}_s$ mit $A\boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{x}$ mit $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ gegeben, so setze $\boldsymbol{x}_h = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_s$. Dann gilt $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_h + \boldsymbol{x}_s$ und

$$A\boldsymbol{x}_h = A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s}_s) = A\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}.$$

4.10 Hermite Normalform

Durch Multiplikation mit den Kehrwerten kann man erreichen, dass alle Pivots den Wert 1 annehmen. Durch Zeilenumformungen von unter nach oben kann man dann weiterhin erreichen, dass über den Pivots nur noch 0 steht. Das Ergebnis ist dann die *Hermite Normalform* der Koeffizientenmatrix. Diese ist sogar eindeutig bestimmt, solange man nur Zeilenumformungen zulässt.

4.11 Gauß'scher Algorithmus

Satz 4.2 *Zu jedem System von m linearen Gleichungen (in Variablen $x_1, \ldots, x_n$) mit Koeffizienten in einem Körper K gibt es ein dazu gleichwertiges (d.h. mit demselben Lösungsraum) in Stufenform. Man kann ein solches aus dem Ausgangssystem durch wiederholte Anwendung der elementaren Umformungen (G1) und (G2) erhalten, insbesondre auch durch den folgenden Algorithmus. Dabei werden auch die zugehörigen homogenen Systeme ineinander überführt.*

Rekursive Definition und induktiver Beweis. Ausgangspunkt ist die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A \mid \boldsymbol{b})$. Wir bilden durch Umformung eine Folge von Systemen mit erweiterter Matrix $(A_k \mid \boldsymbol{b}_k)$ $(k = 0, \ldots, n)$, wobei die ersten k Spalten von A_k eine Matrix in Stufenform bilden mit den Pivots

$$a^{(k)}_{1j_1}, \ldots, a^{(k)}_{lj_l}.$$

Wir starten mit $(A_0 \mid \boldsymbol{b}_0) = (A \mid \boldsymbol{b})$ und $k = l = 0$. Der Rekursionsschtitt geht so:

(a) Ist $a^{(k)}_{i\,k+1} = 0$ für alle $i > l$ so setze $A_{k+1} = A_k$, $\boldsymbol{b}_{k+1} = \boldsymbol{b}_k$

(b) Andernfalls wähle $t > l$ (minimal) mit $a^{(k)}_{t\,k+1} \neq 0$

- Bilde $(A'_k \mid \boldsymbol{b}'_k)$ durch Tausch der $l+1$-ten Zeile gegen die t-te Zeile
- Durch Subtraktion passender Vielfacher der $l+1$-ten Zeile von $(A'_k \mid \boldsymbol{b}'_k)$ von den i-ten Zeilen, $i > l+1$, gewinne $(A_{k+1} \mid \boldsymbol{b}_{k+1})$ so, dass die ersten k Spalten eine Matrix in Stufenform bilden mit Pivots

$$a^{(k)}_{1j_1} = a^{(k+1)}_{1j_1}, \ldots, a^{(k)}_{lj_l} = a^{(k+1)}_{lj_l}, a^{(k+1)}_{l+1 j_{l+1}} = a^{(k)}_{t\,k+1}.$$

Insbesondere bleiben die ersten l Zeilen von $(A_k \mid \boldsymbol{b}_k)$ unverändert.

Bemerkungen. Tritt im Umformungsschritt Fall a) mit $k > 1$ ein, so wird ein waagrechter Teil einer Stufe erzeugt, tritt Fall b) ein, wird eine Stufenkante und ein Pivot erzeugt.

Triviale Gleichungen $0 = 0$ werden ganz nach unten getauscht und zum Schluss weggelassen, man kann sie also auch gleich weglassen.

Tritt eine widersprüchliche Gleichung $0 = b$ mit einer Zahl $b \neq 0$ auf, so kann man abbrechen und feststellen, dass das System unlösbar ist.

Die Beschreibung des Algorithmus ist ein Beweis des Satzes - und von grundsätzlicher Bedeutung. Offen bleiben vorerst die Fragen:
Ist die Anzahl der freien Parameter durch die Koeffizientenmatrix eindeutig bestimmt oder hängt sie davon ab, wie man rechnet? Wie bestimmt man aus der Koeffizientenmatrix alle möglichen Wahlen unabhängiger Variablen?

Für die Praxis gibt es einerseits Verfahren, die die Struktur des Gleichungssystems berücksichtigen bzw. das Aufstellen von Gleichungssystemen mit mit günstiger Struktur unterstützen (z.B. Netzwerkanalyse) und numerische Verfahren, die die Rechengenauigkeit erhöhen. Insbesondere ist es günstig, mit betragsmäßig möglichst großen Pivots zu arbeiten und zu diesem Zweck auch Spaltentausch zuzulassen - dabei muss man natürlich über die Zuordnung der Variablen zu den Spalten Buch führen, z.B. indem man diese über die jeweilige Spalte schreibt.

5 Vektorräume

5.1 Axiome

Für die Vektorrechnung hatten wir die Regeln (V1)-(V8) geometrisch motiviert. Gegeben einen Körper K, nehmen wir nun diese Regeln als Axiome. Ein *Vektorraum* V über (dem *Skalarenkörper*) K oder kurz K-*Vektorraum* wird gegeben durch eine Menge V (deren Elemente auch *Vektoren* heissen sollen) mit Operationen

$$(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{x} + \vec{y}, \quad \vec{x} \mapsto -\vec{x},$$

auf V, der Konstante 0 (*Nullevktor*) und der *Multiplikation mit Skalaren*

$$(r, \vec{x}) \mapsto \lambda\vec{x} \quad \text{wobei } r \in K,\ \vec{x} \in V$$

so, dass (V1) - (V8) gelten:

$$(V1) \quad \text{für alle } \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ in } V \text{ gilt } \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$$

$$(V2) \quad \text{für alle } \vec{u}, \vec{v} \text{ in } V \text{ gilt } \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

$$(V3) \quad \text{für alle } \vec{v} \text{ in } V \text{ gilt } \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$$

$$(V4) \quad \text{für alle } \vec{v} \text{ in } V \text{ gilt } \vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$$

$$(V5) \quad \text{für alle } r \text{ in } K \text{ und } \vec{v}, \vec{w} \text{ in } V \text{ gilt } r(\vec{v} + \vec{w}) = r\vec{v} + r\vec{w}$$

$$(V6) \quad \text{für alle } \vec{v} \text{ in } V \text{ gilt } 1\vec{v} = \vec{v}$$

$$(V7) \quad \text{für alle } r, s \text{ in } K \text{ und } \vec{v} \text{ in } V \text{ gilt } (r + s)\vec{v} = r\vec{v} + s\vec{v}$$

$$(V8) \quad \text{für alle } r, s \text{ in } K \text{ und } \vec{v} \text{ in } V \text{ gilt } r(s\vec{v}) = (rs)\vec{v}\,.$$

Der Körper K ist integraler Bestandteil des Begriffs, seine Elemente heissen Skalare, die von V Vektoren. $r\vec{v}$ heisst die Streckung des Vektors $\vec{v}$ um den Skalar r oder das Produkt des Skalars r mit dem Vektor $\vec{v}$. Das neutrale Element bzgl. der Addition ist der *Nullvektor* $\vec{0}$. Die Pfeile sind lediglich eine Dekoration, die die Lesbarkeit fördern soll.

Beispiele. Der Raum der Vektoren der Elementargeometrie (über $\mathbb{R}$) und der Raum K^m der m-Spalten. Ganz analog, nur in anderer Schreibweise der Raum der n-Zeilen

$$(a_1, \ldots, a_n)$$

5.2 Untervektorräume

Eine Teilmenge U eines K-Vektorraums V ist ein *(K)-Untervektorraum* oder *linearer Teilraum*, wenn sie unter den Operationen von V abgeschlossen ist, d.h. wenn

$$\vec{0} \text{ in } U,\ \vec{u} + \vec{v} \text{ in } U,\ r\vec{u} \text{ in } U \text{ für alle } \vec{u}, \vec{v} \text{ in } U, r \text{ in } K.$$

U ist dann mit den von V geerbten Operationen selbst ein K-Vektorraum.

Beispiele.

- V und $\vec{0}$ (für Pedanten $\{\vec{0}\}$) sind die trivialen Untervektorräume von V.
- Vektorielle Ebenen und Geraden im vektoriellen Anschaungsraum.
- Der Lösungsraum $\{\boldsymbol{v} \in K^n \mid A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\}$ eines homogenen linearen Gleichungsystems mit $A \in K^{m \times n}$ ist Untervektorraum von K^n

5.3 Erzeugen

Sind $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ im Vektorraum V gegeben, so ist

$$r_1\vec{v}_1 + \ldots + r_n\vec{v}_n = \sum_{i=1}^{m} r_i\vec{v}_i \text{ mit } r_1, \ldots, r_n \text{ in } K$$

eine *Linearkombination* der $\vec{v}_i$ und

$$\mathsf{Lin}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\} := \{\sum_{i=1}^{m} r_i\vec{v}_i \,|\, r_i \in K\}$$

das *Erzeugnis* oder *lineare Hülle* der $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$. Für $m = 0$, d.h. die leere Liste, sei $\vec{0}$ das Erzeugnis.

Lemma 5.1 $\mathsf{Lin}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ *ist der kleinste K-Untervektorraum von V, der $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ enthält.*

Man spricht auch von dem von $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ *erzeugten* oder *aufgespannten* Untervektorraum. Beispiele: Parameterdarstellung vektorieller Geraden und Ebenen. Den von den Spalten einer Matrix $A \in K^{m\times n}$ erzeugten Untervektorraum von K^m bezeichnen wir mit $\mathsf{Lin}(A)$.

Beweis: Die angegebene Menge von Linearkombinationen bildet einen Untervektorraum:

$$\sum_i r_i\vec{v}_i + \sum_i s_i\vec{v}_i = \sum_i (r_i + s_i)\vec{v}_i, \quad r\sum_i r_i\vec{v}_i = \sum_i (rr_i)\vec{v}_i$$

Andererseits muss jeder Untervektorraum, der $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ enthält, auch alle diese Linearkombinationen enthalten. □

Korollar 5.2 *Sind die $\vec{w}_j$ ($j \in J$) Linearkombinationen der $\vec{v}_i$ ($i \in I$), so ist jede Linearkombination $\vec{u}$ der $\vec{w}_j$ eine Linearkombination der $\vec{v}_i$.*

Beweis. Das ist klar, wir können es aber auch rechnen.

$$\vec{u} = \sum_j s_j\vec{w}_j, \;\; \vec{w}_j = \sum_i r_{ij}\vec{v}_i \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = \sum_j s_j \sum_i r_{ij}v_i = \sum_{i,j} s_j r_{ij}\vec{v}_i = \sum_i (\sum_j s_j r_{ij})\vec{v}_i \qquad \square$$

5.4 Unabhängigkeit und Basis

Lemma 5.3 *Seien $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ Vektoren des K-Vektorraums V. Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:*

(1) *Die Darstellung der Elemente von V, soweit möglic, als Linearkombinationen der $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ ist eindeutig.*

(2) $r_1\vec{v}_1 + \ldots + r_n\vec{v}_n = \vec{0}$ *ist nur in der trivialen Weise $r_1 = \ldots = r_n = 0$ möglich.*

(3) *Für kein j ist $\vec{v}_j$ Linearkombination der $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{j-1}, \vec{v}_{j+1}, \ldots, \vec{v}_n$.*

(4) *$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ ist ein minimales Erzeugendensystem von $U = \mathsf{Lin}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$, d.h. für kein j wird U von den $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{j-1}, \vec{v}_{j+1}, \ldots, \vec{v}_n$ erzeugt.*

Trifft eine der Aussagen zu, so sind die $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ (linear) *unabhängig*. Sins sie auch erzeugend, d.h. gilt $\mathsf{Lin}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$, so bilden sie eine *Basis* α von V. Der Raum $\vec{0}$ hat die leere Basis.

Beweis. (1)⇒(2) trivial. (2)⇒(1): Aus $\sum r_i\vec{v}_i = \sum s_i\vec{v}_i$ folgt $\sum(r_i - s_i)\vec{v}_i = \vec{0}$, also $r_i - s_i = 0$ für alle i. (2) ⇔ (3): $\sum r_i\vec{v}_i = 0$ mit festem $r_j \neq 0$ ist gleichbedeutend mit $\vec{v}_j = \sum_{i\neq j} r_j^{-1} r_i\vec{v}_i$. (3)⇒(4) trivial. (4)⇒(3) mit Korollar 5.2. □

Korollar 5.4 *Wählt man aus einem Erzeugendensystem von V eine maximale Anzahl unabhängiger Vektoren aus, so erhält man eine Basis von V.*

Korollar 5.5 *Sind $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ unabhängig und $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n, \vec{v}$ abhängig, so $\vec{v} \in \mathsf{Lin}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$.*

Beweis: Es gibt $r\vec{x} + \sum r_i\vec{v}_i = \vec{0}$, nicht alle Skalare $= 0$. Wäre $r = 0$, so Wiederspruch zu Unabhängigkeit der $\vec{v}_i$, Also $r \neq 0$ und man kann nach $\vec{v}$ auflösen

Beispiele. Je drei Vektoren des Anschauungsraumes, die nicht in einer Ebene liegen, bilden eine Basis.
Die Pivot-Spalten einer stufenförmigen $m \times n$-Matrix sind unabhängig im Vektorraum K^m der m-Spalten über K. Insbesondere bilden die Einheitsspalten

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; \ldots, \boldsymbol{e}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

die *kanonische* Basis des Spaltenraums K^m. Allgemeiner sei definiert: Die Matrix A ist in *solider Stufenform*, wenn auf jeder Stufe nur Nicht-Null-Einträge stehen, d.h. sind a_{ij_i} und $a_{i_1,j_{i+1}}$ aufeindanderfolgende Pivots,so $a_{ij} \neq 0$ für $j_i \leq j < j_{i+1}$. Durch Sortieren (d.h. Vertauschen) kann man jede stufenörmige Matrix in eine solide überführen.

Korollar 5.6 *Spalten $\boldsymbol{a}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{j_l}$ einer Matrix $A \in K^{m\times n}$ in solider Stufenform sind unabhängig in K^m, wenn zu jeder Stufe höchstens eine Spalte gewählt wird - und keine zur unechten Stufe vor dem ersten Pivot. Sie bilden eine Basis von $\mathsf{Lin}(A)$, wenn zu jeder echten Stufe genau eine Spalte gewählt wird.*

Beweis. Betrachte das durch die gewählten Spalten gegebene homogene Gleichungssystem. Eindeutige (triviale) Lösbarkeit ist gegeben, wenn wie angegeben ausgewählt wird. Wird zu jeder Stufe eine Spalte gewählt, so ist jede weitere abhängig. □

Bemerkung 5.7 *Sind $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ unabhängig, so kommt unter ihnen $\vec{0}$ nicht vor, und auch kein Vektor mehr als einmal. Bei der Unabhängigkeit und beim Erzeugen kommt es auf die Anordnung nicht an und man könnte auch von unabhängigen bzw. erzeugenden Mengen von Vektoren sprechen. Beim Begriff der Basis ist die Anordnung aber für fast alle Anwendungen wesentlich: Durch Vertauschen der Reihenfolge erhält man wieder eine Basis desselben Raums, aber eine andere.*

5.5 Koordinaten

Korollar 5.8 *Ist $\alpha : \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ Basis des K-Vektorraumes V, so kann man jedem Vektor $\vec{x} \in V$ umkehrbar eindeutig seine Koordinatenspalte $\vec{x}^\alpha \in K^m$ zuordnen*

$$\vec{x} = \sum x_i \vec{v}_i \mapsto = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \vec{x}^\alpha = \begin{pmatrix} x_1^\alpha \\ \vdots \\ x_m^\alpha \end{pmatrix}$$

Es gilt

- $(\vec{x} + \vec{y})^\alpha = \vec{x}^\alpha + \vec{y}^\alpha \quad (r\vec{x})^\alpha = r\vec{x}^\alpha, \quad \vec{v}_i^\alpha = \boldsymbol{e}_i$
- *Vektoren $\vec{x}_1, \ldots \vec{x}_n$ sind unabhängig genau dann, wenn ihre Koordinatenspalten $\vec{x}_1^\alpha, \ldots, \vec{x}_n^\alpha$ unabhängig sind.*
- *$\vec{x} \in \mathsf{Lin}\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$ genau dann, wenn $\vec{x}^\alpha \in \mathsf{Lin}\{\vec{x}_1^\alpha, \ldots \vec{x}_n^\alpha\}$*
- *$\vec{x}_1, \ldots \vec{x}_n$ ist Basis von V genau dann, wenn $\vec{x}_1^\alpha, \ldots \vec{x}_n^\alpha$ Basis von K^m*

5.6 Dimension

Satz 5.9 *Hat ein K-Vektorraum V eine Basis $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$, dann*

(a) *besteht jede Basis von V aus m Vektoren*

(b) *ist m die Maximallänge von unabhängigen Listen von Vektoren in V*

(c) *ist m die minimale Elementanzahl von Erzeugendensystemen von V*

(d) *bilden je m unabhängige Vektoren eine Basis*

Im Fall des Satzes heisst $m = \dim_K V = \dim V$ die *Dimension* von V. Wir schreiben $\dim V < \infty$, falls V eine endliche Basis hat. Insbesondre $\dim K^m = m$.

Beweis. Zum Beweis von (b) dürfen wir annehmen, dass $V = K^m$. Sei nun $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ unabhängig. Wir haben zu zeigen, dass $n \leq m$. Dazu führen wir die Gegenannahme $n > m$ zum Widerspruch. Sei

$$\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

und betrachte das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

Dieses können wir äquivalent in Stufenform überführen und wegen $n > m$ gibt es mindestens einen freien Parameter. Setzen wir den $= 1$, so erhalten wir eine nichttriviale Lösung, im Widerspruch zur Voraussetzung der Unabhängigkeit. Damit ist (b) bewiesen.

Zu (a): Ist $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n$ eine Basis, so folgt aus (b), dass $n \leq m$. Durch Vertauschen der Rollen folgt auch $m \leq n$, also $n = m$.

Zu (c): Ein Erzeugendensystem minimaler Elementanzahl ist nach Kor.5.4 eine Basis.

Zu (d): Jeder hinzugenommene Vektor führt zu linearer Abhängigkeit. □

Korollar 5.10 *Ist $\dim V < \infty$, so hat jeder Untervektorraum U von V Dimension $\dim U \leq \dim V$ und es gilt*

$$U \subseteq W \Rightarrow: \quad U = W \Leftrightarrow \dim U = \dim W$$

5.7 Rang einer Matrix

Den von den Spalten der Matrix $A \in K^{m \times n}$ erzeugten Untervektorraum von K^m bezeichnen wir mit $\mathsf{Lin}(A)$ und nennen ihn den *Spaltenraum* von A. Die Dimension von $\mathsf{Lin}(A)$ ist der *Rang* (genauer: *Spaltenrang*) von A

$$\mathsf{Rang}(A) = \dim \mathsf{Lin}(A)$$

Lemma 5.11 *Geht A' aus A durch Zeilenumformungen hervor, so sind Spalten von A linear unabhängig genau dann, wenn die entsprechenden Spalten von A' unabhängig sind. Insbesondere gilt*

$$\mathsf{Rang}(A) = \mathsf{Rang}(A') = \text{ Anzahl Nicht-Null-Zeilen von } A'$$

Beweis. Die Matrix B enthalte eine Auswahl unabhängiger Spalten von A. Die auf A ausgeführten Umformungen überführen B in B'. Da $B\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ und $B'\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ den gleichen Lösungsraum haben und der für B nur aus $\boldsymbol{0}$ besteht, sind die Spalten von B' unabhängig. Diese bilden aber gerade die entsprechende Auswahl aus A'. Da man A' rückwärts wieder in A umformen kann, gilt auch die Umkehrung. □

Ist A' Stufenform zu A, so erzeugen A und A' offenbar den gleichen Untervektorraum des Raumes K^{n*} aller n-Zeilen, den *Zeilenraum* von A. Die Nicht-Null-Zeilen von A' sind lineare unabhängig, also eines Basis des Zeilenraums von A, ihre Anzahl heißt auc der *Zeilenrang* von A. Nach dem Lemma ist das der Rang von A.

Korollar 5.12 *Ist $A \in K^{m \times n}$ hat der Lösungsraum des homogenen Systems die Dimension*

$$\dim\{\boldsymbol{v} \mid A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\} = n - \mathsf{Rang}(A).$$

Beweis. Überführe A in Stufenform A'. Unsere oben angegebene Konstruktion liefert offenbar ein unabhängiges Fundamentalsystem von Lösungen - es genügt die Einträge v_{ij} zu betrachten, wobei x_i freier Parameter ist. Ausserdem wurde gezeigt, dass das Fundamentalsystem den Lösungsraum erzeugt. □

Unter einem *Fundamentalsystem* von Lösungen eines linearen Gleichungssystem wollen wir einfach eine Basis der Lösungsraums des homogenen Systems verstehen.

Korollar 5.13 *$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist lösbar genau dann, wenn der Rang von A gleich dem Rang der erweiterten Matrix $(A \mid \boldsymbol{b})$ ist.*

Beweis. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist lösbar genau dann, wenn $\boldsymbol{b} \in \mathsf{Lin}(A)$ genau dann wenn $\mathsf{Lin}(A) = \mathsf{Lin}(A \mid \boldsymbol{b})$. Nun benutze Kor.5.10. □

5.8 Unabhängige Variablen

Hat das System $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ überhaupt eine Lösung, so stellt sich die Frage, wie man die Variablen x_i in abhängige und unabhängige unterteilen kann. Ist das System in Stufenform $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ gegeben, so kann man durch Vertauschen von Spalten (einschließlich der zugehörigen Variablen eine Stufenform erreichen, in der die Pivots auf der Diagonale, also in Position (i,i) stehen. Dann ist klar, dass die man diese Variablen als die abhängigen, alle anderen als die unabhängigen ansehen kann. Die 'Pivotspalten' bilden dann gerade eine Basis des Spaltenraums von A'. Wie in Lemma 5.11 gezeigt, bilden dann die entprechenden Spalten von A eine Basis des Spaltenraums von A.

Ist umgekehrt eine Basis des Spaltenraums von A gegeben, so bringe man diese durch Vertauschen in die vorderen Positionen und überführe dann in Stufenform. Dann gehen diese Spalten gerade in die Pivotspalten über und entsprechen somit den abhängigen Variablen.

Für ein lösbares System $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ergeben sich die Unterteilungen in abhängige und unabhängige Variablen gerade dadurch, dass man eine Maximalzahl unabhängiger Spalten auswählt und die entsprechenden Variablen als die abhängigen nimmt, die restlichen als die unabhängigen.

Hat man die Matrix A mit Zeilenumformungen auf Stufenform gebracht, kann man durch Spaltenvertauschungen zu einer Form übergehen, in der auf jeder 'Stufe' nur Einträge $\neq 0$ stehen (solide Stufenform). Mögliche Auswahlen der abhängigen Variablen ergeben sich dann dadurch, dass man zu jeder Stufe genau eine Variable auswählt. Weitere Auswahlen sind aber durchaus möglich. Z.B. gibt es zu 3×7-Matrix aller Nicht-Nullspalten aus $\{0,1\}^3$ mindestens 28 solche Auswahlen (ohne Berücksichtigung der Anordnung) und genau 28, wenn man im Körper $K = \{0,1\}$ rechnet.

Um die obige Aussage komplett zu beweisen, darf man sich aber nicht nur auf die Zeilenstufenform beziehen. Wir haben noch zu zeigen

(i) Kann man für die Lösungen $\boldsymbol{x}$ von $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ die Variablen $x_{i_1},\ldots,x_{i_r}$ durch die übrigen ausdrücken, so sind die Spalten $\boldsymbol{a}_{i_1},\ldots,\boldsymbol{a}_{i_r}$ von A linear unabhängig.

Dazu benötigen wir die folgenden beiden Aussagen, wobei $\mathsf{LinZ}(A)$ den von den Zeilen von $A \in K^{m\times n}$ erzeugten Untervektorraum des Raums K^{n*} aller n-Zeilen bedeutet.

(ii) Die homogenen linearen Gleichungssysteme $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ und $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ haben denselben Lösungsraum genau dann, wenn $\mathsf{LinZ}(A) = \mathsf{LinZ}(B)$

(iii) Gilt $\mathsf{LinZ}(A) = \mathsf{LinZ}(B)$, so sind die Spalten $\boldsymbol{a}_{i_1},\ldots,\boldsymbol{a}_{i_r}$ von A linear unabhängig genau dann, wenn die Spalten $\boldsymbol{b}_{i_1},\ldots,\boldsymbol{b}_{i_r}$ von B linear unabhängig sind.

Um (i) zu beweisen, dürfen wir die Spalten von A vertauschen und die Variablen so umnummerieren dass

$$x_i = \sum_{j=r+1}^{n} r_{ij}x_j \quad i = 1,\ldots,r$$

Setze nun für $i = 1,\ldots,r$

$$b_{ii} = 1,\;\; b_{ij} = -r_{ij} \text{ für } j = r+1,\ldots n,\;\; b_{ij} = 0 \text{ sonst}$$

also

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -r_{1,r+1} & \cdots & -r_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -r_{2,r+1} & \cdots & -r_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -r_{r,r+1} & \cdots & -r_{rn} \end{pmatrix}$$

Nach Voraussetzung haben $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ und $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ dieselben Lösungen, also nach (ii) $\mathsf{LinZ}(A) = \mathsf{LinZ}(B)$. Nun sind die ersten r Spalten von B unabhängig, also nach (iii) auch die von A.

Im Beweis von (ii) sei $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_l$ eine Basis des Lösungsraums von $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Die Zeilen $(a_1,\ldots,a_n)$ mit $a_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + a_n\boldsymbol{v}_n = 0$ kann man als Lösungen eines homogenen Gleichungssystems verstehen, dessen Koeffizientenmatrix die $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_l$ als Spalten hat. Der Lösungsraum enthält alle Zeilen von A, also auch von $\mathsf{LinZ}(A)$. Nach Kor.5.12 ist seine Dimension $n - l = r = \mathsf{Rang}(A) = \dim \mathsf{LinZ}(A)$ (Lemma 5.11), also ist dieser Raum gerade $\mathsf{LinZ}(A)$. Haben also $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ und $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ denselben Lösungsraum, so folgt $\mathsf{LinZ}(A) = \mathsf{LinZ}(B)$. Die Umkehrung folgt sofort aus Satz 4.1.

Zum Beweis von (iii) bemerke, dass nach Voraussetzung jede Zeile von B eine Linearkombination von Zeilen von A ist und umgekehrt. Das heisst, B entsteht aus A, indem man erst soviel Nullzeilen hinzufügt, wie B Zeilen hat, dann diese durch die Linearkombinationen von Zeilen aus A ersetzt, dann die Zeilen von A durch Subtraktion der entsprechenden Linearkombinationen von Zeilen von B in Nullzeilen verwandelt und diese dann weglässt. Also kann man Lemma 5.11 anwenden.

5.9 Affine Teilräume

Affine Teilräume in der Elementargeometrie sind von der Form

$$U + P = \{\vec{u} + P \mid \vec{u} \in U\}$$

wobei U ein Untervektorraum ist - z.B. ist jede Gerade und jede Ebene ein affiner Teilraum.

Ein *affiner Teilraum* eines Vektorraums ist von der From

$$U + \vec{p} = \{\vec{u} + \vec{p} \mid \vec{u} \in U\}$$

wobei U ein Untervektorraum von V ist. U ist durch $U + \vec{p}$ eindeutig bestimmt und

$$U + \vec{p} = U + \vec{q} \quad \text{für alle } \vec{q} \in U + \vec{p}$$

Korollar 5.14 *Der Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit $A \in K^{m\times n}$ ist ein affiner Teilraum von K^n mit dem Lösungsraum des homogenen Systems als zugehörigen Untervektorraum*

$$\{\boldsymbol{x} \in K^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\} = \{\boldsymbol{x}_h \mid A\boldsymbol{x}_h = \boldsymbol{0}\} + \boldsymbol{x}_s.$$

Umgekehrt ist auch jeder affine Teilraum von K^n auch Lösungsraum eines passenden linearen Gleichungssystems (und aller daraus durch Umformung entstehenden).

5.10 Systeme Kirchhoffscher Gleichungen

Ein Gleichstromnetz kann abstrahiert werden zu einer Menge V von Knoten (*Vertices*) und eine Menge E von Paaren (v, w) von Knoten $v \neq w$, den *Kanten* oder in der ET *Zweigen* - die Kante stellt eine Leiter zwischen den Knoten v und w dar, dem zusätzlich die Orientierung von v nach w gegeben ist. Graphisch wird ein Knoten durch einen dicken Punkt und eine Kante durch einen die betreffenden Knoten verbindenden Pfeil dargestellt. Ist $(v, w) \in E$ so muss $(w, v) \notin E$ gelten.

Die Struktur (V, E) ist dann ein endlicher (schlichter) *gerichteter Graph* - ohne Schleifen (v, v) und ohne Mehrfachkanten zwischen zwei Knoten. Jeder Kante $e \in E$ ordnen wir eine Variable x_e (für der Strom von v nach w) und y_e (für die Spannung zwischen v und w) zu - alle diese Variablen seien voneinander erschieden.

Das *erste Kirchoffsche Gesetz* führt zu der *Knotengleichungen* für den Knoten v

$$\sum_{(v,w)\in E} x_{(v,w)} - \sum_{(w,v)\in E} x_{(w,v)} = 0$$

Ein *Kantenzug* in (V, E) ist eine Menge $\{e_1, \ldots, e_k\}$ von k Kanten in E so, dass es eine Folge $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}$ von Knoten gibt mit

$$(v_i, v_{i+1}) = e_i \text{ oder } (v_{i+1}, v_i) = e_i \text{ für } i = 1, \ldots, k.$$

Ein Kantenzug ist ein *Umlauf* in (V, E) falls $v_{k+1} = v_1$. Das *zweite Kirchhoffsche Gesetz* für dann zur *Umlaufgleichung*

$$\sum_{e_i=(v_i,v_{i+1})} y_{e_i} - \sum_{e_i=(v_{i+1},v_i)} y_{e_i} = 0$$

Wir wollen sowohl das System aller Knotengleichungen eines gerichteten Graphen wie auch das System aller Umlaufgleichungen hinsichtlich Rang und Auswahl abhängiger Variablen analysieren. Dabei dürfen wir annehmen, dass je zwei Knoten über eine Kantenzug verbunden sind, d.h. dass der Graph *zusammenhängend* ist - sonst zerfällt das Gleichungssystem in disjunkte Systeme, die einzeln behandelt werden können.

Der folgende Begriff ist entscheidend: Ein *spannender Baum* von (V, E) ist eine Menge $T \subseteq E$ von Kanten so, dass

- Es gibt keinen nur aus Kanten von T bestehenden Umlauf
- Zu je zwei Knoten v, w gibt es einen Kantenzug zwischen v und w bestehend aus Kanten in T.

Es gilt offenbar

- Jeder endliche gerichtete Graph hat mindestens einen spannenden Baum

Einen solchen findet man, indem man mit einer beliebigen Kante anfängt (oder eine Menge von Kanten, die keinen Umlauf enthält) und nach Belieben jeweils eine neue Kante hinzunimmt, solange dadurch kein Umlauf entsteht. Ist ein spannender Baum T gewählt, so heissen die Kanten $e \in E \setminus T$ *Verbindungszweige*.

Ein Knoten $b \in T$ ist ein *Blatt* von T, wenn es nur einen Knoten v gibt so, dass $(v, b) \in T$ oder $(b, v) \in T$. e_b bezeichne diese eindeutig bestimmte Kante in T. Es gilt

- Jeder spannende Baum hat mindestens ein Blatt.

Sonst würde man von einem beliebigen Knoten v_1 ausgehend, einen unendlichen Kantenzug erhalten. Ist b ein Blatt von T so definiere

$$V_b = V \setminus \{b\}, \quad E_b = \{(v, w) \in E \mid v \neq b \neq w\}, \quad T_b = T \setminus \{e_b\}$$

- T_b ist ein spannender Baum des Graphen (V_b, E_b), der durch Weglassen der mit b inzidenten Kanten entsteht.

Durch Induktion folgt ($|X|$ bezeichne die Anzahl der Elemente von X)

- $|T| = |V| - 1$ für jeden spannenden Baum von (V, E)

Satz 5.15 *Das System $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ aller Knotengleichungen von (V, E) hat Rang $|V| - 1$; genauer: Je $|V| - 1$ Zeilen von A sind linear unabhängig und die Summe aller Zeilen ist die Nullzeile. Ist T ein spannender Baum, so kann man die x_e $(e \in T)$ als die abhängigen Variablen wählen, die x_e mit e Verbindungszweig als die freien Parameter.*

Beweis. Sei $l = |E|$ die Anzahl der Kanten, k die Anzahl der Knoten. Die Knoten und Kanten seien so nummeriert, dass die $e_1, \ldots, e_m$ die Kanten in E_b sind, $e_l = e_b$, $v_h = b$ und dass genau für die $v_1, \ldots, v_h$ eine Kante, bezeichnet mit e_{m+i}, zwischen v_i und b besteht (also $l = m + h$). Dabei sei

$$\varepsilon_{m+i} = \begin{cases} 1 & \text{falls } e_{m+i} = (v_i, b) \\ -1 & \text{falls } e_{m+i} = (b, v_i) \end{cases}$$

Bezeichne B die Matrix für das System der Knotengleichungen von (V_b, E_b). Dann erhält man A aus B wie folgt

$$A = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} & \varepsilon_{m+1} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & \cdots & b_{2m} & 0 & \varepsilon_{m+2} & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \varepsilon_l \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ b_{k-1,1} & & b_{k-1,m} & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\varepsilon_{m+1} & -\varepsilon_{m+2} & \cdots & -\varepsilon_l \end{pmatrix}$$

Dann $\mathsf{Rang}(A) = \mathsf{Rang}(B) + 1 = k - 2 + 1 = k - 1$ nach Induktionsannahme und ebenso Summe aller Zeilen = Nullzeile. Auch sind die den $e \in T_b$ entsprechenden Spalten von B bzw. A unabhängig und die Spalte von e_b kann nicht Linearkombination von diesen sein. Also sind die Spalten zu den $e \in T$ unabhänging. □

Sei ein spannender Baum T gewählt. *Maschen* sind Umläufe, bei denen alle Kanten außer einer zu T gehören. Ist e ein Verbindungszweig, so gibt es genau eine Masche, die die Kante e enthält (sonst könnte man e zu T hinzunehmen). Die zugehörigen Gleichungen heissen auch die *Maschengleichungen*.

Satz 5.16 *Die Zeilen zu den Maschengleichungen bilden eine Basis für den von Zeilen zu den Umlaufgleichungen aufgespannten Raum. Das System der Maschengleichungen hat Rang $|E| - |T|$ (falls T ein spannender Baum ist) und man kann die Variablen y_e ($e \in T$) als die unabhängigen wählen, die y_e mit e Verbindungszweig als die abhängigen.*

Beweis. Wird bei einem Umlauf ein Knoten mehrmals durchlaufen, so kann man den Umlauf in zwei disjunkte Umläufe zerlegen und erhält die Gleichung als die Summe dieser beiden Gleichungen. Sei nun T ein spannender Baum. Dann ist jeder solche unzerlegbare Umlauf eine Masche oder eine im umgekehrter Orientierung (und damit die Gleichung die Maschengleichung mal -1). Also folgen alle Umlaufgleichugen aus dem System $C\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ der Maschengleichungen. Sei b ein Blatt und D die Matrix des Systems der t Maschengleichungen von (V_b, E_b), wobei die Anordnung der t Zeilen von D unwesentlich ist. Die Nummerierung der neuen Kanten und die ε_i seien wie im vorangehenden Beweis gewählt. Insbesondere sind die $e_{m+1}, \dots e_{l-1}$ die $s = l - m - 1$ neuen Verbindungszweige. Dann ergibt sich die Matrix C für die Maschengleichungen von (V, E) wie folgt

$$C = \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1m} & 0 & & \cdots & & 0 \\ d_{21} & \cdots & d_{2m} & 0 & & \cdots & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ d_{t1} & \cdots & d_{tm} & 0 & & \cdots & & 0 \\ c_{t+1,1} & \cdots & c_{t+1,m} & -\varepsilon_{m+1} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ c_{t+2,1} & \cdots & c_{t+2,m} & 0 & -\varepsilon_{m+2} & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{t+s,1} & \cdots & c_{t+s,m} & 0 & \cdots & \cdots & -\varepsilon_{l-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Nach Induktionsannahme sind die Spalten in D zu den Verbindungszweigen von (V_b, E_b) unabhängig, dann auch die entsprechenden Spalten von C. In der Stufenform der Teilmatrix von D bestehend aus diesen Spalten hat man dann nur Pivotspalten und kann daher in den entprechenden Spalten von C die zuätzlichen Zeilen durch Umformung nur mithilfe der ersten t in Nullzeilen überführen. Nimmt man die zu den neuen Kanten ($e \in E \setminus T$ gehörigen letzten $l - m$ Spalten hinzu, so werden diese bei diesen Umformungen nicht verändert. Die l-te Spalte zu e_b ist offenbar Linearkombination der anderen neuen Spalten Nr.$m + 1, \dots, l - 1$ und nimmt man die l-te Spalte weg, so hat man für die Verbindungszweige eine Matrix in Stufenfrom mit lauter Pivot-Spalten. Also sind diese unabhängig und C hat Rang $\geq$ Anzahl der Verbindungszweige in E. Da aber C gerade soviel Zeilen hat, gilt Gleichheit. □

Sowohl bei den Knotengleichungen wie bei den Maschengleichungen kann man zu jeder Auswahl der abhängigen Variablen einen entsprechenden spannenden Baum finden. Der Beweis für die Knoten beruht darauf, dass die Koeffizientenmatrix eine lineare Darstellung des Kreismatroids des Graphen bestimmt. Bei den Maschen geht es um das duale Matroid. Literatur: A. Recski, Matroid Theory and its Applications in Electric Network Theory and Statics. Springer and Akademiai Kiado, Budapest 1989.

6 Reelle Zahlen

6.1 Anordnung

Ein *angeordneter Körper* ist ein Körper zusammen mit eine Relation $<$ so, dass die folgenden Axiome gelten

(1) $x < x$ für kein x — *Irreflexivität*

(2) Aus $x < y$ und $y < z$ folgt $x < z$ — *Transitivität*

(3) $x < y$ oder $x = y$ oder $y < x$ — *Totalität*

(4) Aus $x < y$ folgt $x + z < y + z$ — *Monotonie der Addition*

(5) Aus $x < y$ und $0 < z$ folgt $xz < yz$ — *Monotonie der Multiplikation*

Wir schreiben $a \leq b$ falls $a < b$ oder $a = b$. Wir schreiben $b > a$ und $b \geq a$ für $a < b$ bzw. $a \leq b$. Die Anordnung ergibt sich schon aus dem *Positivbereich* $\{a \in K \mid a > 0\}$ - nämlich $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$. Entsprechend heisst a *positiv* wenn $a > 0$, *negativ* wenn $a < 0$, und *nicht-negativ* wenn $a \geq 0$. Für $a < b$ definieren wir die Intervalle

$$\begin{array}{llll} [a,b] & & = \{x \in K \mid a \leq x \leq b\} & \text{abgeschlossen} \\ [a,b) & = \ [a,b[& = \{x \in K \mid a \leq x < b\} & \text{rechts-halboffen} \\ (a,b] & = \ ]a,b] & = \{x \in K \mid a < x \leq b\} & \text{links-halboffen} \\ (a,b) & = \ ]a,b[& = \{x \in K \mid a < x < b\} & \text{offen} \end{array}$$

Es folgen die Regeln

(6) Aus $x < y$ und $u < v$ folgt $x + u < y + v$

(7) Aus $0 < x < y$ und $0 < u < v$ folgt $xu < yv$

(8) $-1 < 0 < 1$ und $x > 0 \Leftrightarrow -x < 0$

(9) $x > 0 \Leftrightarrow x^{-1} > 0$ und $x \geq 1 \Leftrightarrow x^{-1} \leq 1$ und $0 < x < y \Rightarrow y^{-1} < x^{-1}$

(10) $xy > 0 \Leftrightarrow \quad x > 0$ und $y > 0$ oder $x < 0$ und $y < 0$

(11) Aus $x < y$ und $z < 0$ folgt $xz > yz$

Beweis. (6) $x + u < y + u < y + v$. (7) ebenso. (8): Angenommen $1 < 0$. Dann $0 = 1 - 1 < 0 - 1 = -1$ und $-1 = 1 \cdot (-1) < 0 \cdot (-1) = 0$, Widerspruch. Angenommen $x > 0$ und $-x > 0$. Dann $0 = -x + x > 0 + x = x$. Widerspruch. (9) Sei $x > 0$. Angenommen $x^{-1} < 0$. dann $1 = xx^{-1} < x0 = 0$ Widerspruch. Umkehrung mit $x = (x^{-1})^{-1}$. Sei $x \geq 1$. Dann $1 = xx^{-1} \geq 1x^{-1} = x^{-1}$. Ist $0 < x < y$, so $y^{-1} = xx^{-1}y^{-1} < yx^{-1}y^{-1} = x^{-1}$. (10) Sei $xy > 0$. Ist $x > 0$ dann $y = x^{-1}xy > x^{-1}0 = 0$. Ebenso $x > 0$ aus $y > 0$. Sind $x > 0$ und $y > 0$ so folgt $xy > 0y = 0$ mit (5). Sind $x < 0$ und $y < 0$ so $-x > 0$ und $-y > 0$ also $xy = 1xy = (-1)(-1)xy = (-x)(-y) > 0$. (11) Sei $x < y$ und $z < 0$. Dann $y - x > 0$ und $yz - xz = (y - x)z < (y - x)0 = 0$ also $yz < xz$. □

$\mathbb{Q}$ ist ein angeordneter Körper und in jedem angeordneten Körper auf natürliche Weise enthalten

$$\frac{n}{m} \hat{=} (\underbrace{1+\ldots+1}_{n}) \cdot (\underbrace{1+\ldots+1}_{m})^{-1}$$

Wir haben den Bereich $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen als Skalarenbereich mittels Zahlengeraden eingeführt und Addition, Multiplikation, und Anordnung geometrisch erklärt. Ebenso können wir die Konstanten 0 und 1 und das Inverse r^{-1} für $r \neq 0$ einführen. Dadurch wird, wie man mit einiger Mühe beweist, $\mathbb{R}$ zum angeordneten Körper.

6.2 Maximum, Minimum und Betrag

Sei M Teilmenge des angeordneten Körpers K. a ist *Maximum* von M, falls $a \in M$ und $x \leq a$ für alle $x \in M$. Falls es existiert, ist es eindeutig bestimmt und wird als $a = \max M$ geschrieben. Jede endliche Menge hat ein Maximum, wie man leicht durch Induktion zeigt.

a ist *Minimum* von M, falls $a \in M$ und $x \geq a$ für alle $x \in M$. Obige Aussagen gelten entsprechend.

Den (*Absolut*)-*Betrag* von $x \in K$ definieren wir als

$$|x| = |-x| = \max\{-x,\, x\} = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

Dann gelten die folgenden Regeln

(1) $|x| \geq 0$ und $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(2) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, insbesondere $|x/y| = |x|/|y|$

(3) $x + y| \leq |x| + |y|$ Dreiecksungleichung

(4) $|x - y| \geq ||x| - |y||$ und $|x + y| \geq ||x| - |y||$

Beweis. (1) $|x| \geq 0$ da $x \geq 0$ oder $-x \geq 0$. Ist $|x| = 0$, so $x \leq 0$ und $-x \leq 0$ also $x = 0$. (2) $|x| \cdot |y| = \pm xy \geq 0$, also $|x| \cdot |y| = \max xy, -xy = |xy|$. (3) $|x| + |y| = \max\{x + y,\, x - y,\, y - x, -x - y\} \geq \max\{x + y,\, -(x + y)\} = |x + y|$. (4) $|x - y| + |y| \geq |x - y + y| = \|x|$ also $|x - y| \geq |x| - |y|$. Ebenso $|x - y| = |y - x| \geq |y| - |x| = -(|x| - |y|)$. Also $|x - y| \geq ||x| - |y||$ und die letzte Ungleichung mit $-y$ statt y. $\square$

6.3 Quadratwurzel

Diese Gesetze angeordneter Körper allein reichen für ein Verständnis des Skalarenbereichs nicht aus, da sie auch schon von $\mathbb{Q}$ erfüllt werden, andererseits aber nicht rationale Skalare existieren. Wir müssen also den Begriff der reellen Zahl so präzisieren, dass er alle geometrischen Grössen einschliesst und mit geometrischen Konstruktionen kompatibel ist. Andererseits wollen wir festschreiben, dass jede reelle Zahl durch rationale Zahlen approximiert werden kann. Wir betrachten zunächst ein Beispiel.

Schon aus Pythagoras Zeiten ist bekannt, dass es keine rationale Zahl x gibt mit $x^2 = 2$. Eine solche könnte man nämlich als $x = \frac{m}{n}$ mit teilerfremden m, n schreiben, es

folgte $m^2 = 2n^2$, also wäre 2 ein Teiler von m^2, also auch von m, und somit 4 ein Teiler von $m^2 = 2n^2$. Dann wäre aber 2 ein Teiler von n^2, also auch von n - Widerspruch.

Geometrisch haben wir jedoch $\sqrt{2}$ als Länge der Diagonale im Einheitsquadrat und wir können sie wie folgt in zwischen rationale Zahlen einschließen

$$a_0 = 1,\ b_0 = 2,\ c_0 = \frac{3}{2}$$

$$a_{n+1} = \begin{cases} c_n & \text{falls } c_n^2 \leq 2 \\ a_n & \text{falls } c_n^2 > 2 \end{cases},\quad b_{n+1} = \begin{cases} c_n & \text{falls } c_n^2 \geq 2 \\ b_n & \text{falls } c_n^2 < 2 \end{cases}$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + b_{n+1})$$

Wir haben

$$\begin{array}{llll} a_0 = 1 & b_0 = 2 & & \\ a_1 = 1 & b_1 = \frac{3}{2} & \text{weil} & \frac{9}{4} > 2 \\ a_2 = \frac{5}{4} & b_2 = \frac{3}{2} & \text{weil} & \frac{25}{16} < 2 \\ a_3 = \frac{11}{8} & b_3 = \frac{3}{2} & \text{weil} & \frac{121}{64} < 2 \\ a_4 = \frac{11}{8} & b_4 = \frac{23}{16} & \text{weil} & \frac{529}{256} > 2 \end{array}$$

Dann gilt nach Konstruktion

$$a_n^2 \leq 2 \leq b_n^2,\ \ 0 \leq b_n - a_n \leq \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n}$$

Haben wir nun in einem angeordneten Körper K ein $c > 0$ mit $c^2 = 2$, so folgt $a_n \leq c \leq b_n$ für alle n. Und ist $d > 0$ in K so, dass $a_n \leq d \leq b_n$ für alle n, so folgt

$$|c^2 - d^2| \leq b_n^2 - a_n^2 \leq (b_n - a_n)(b_n + a_n) \leq \frac{4}{2^n} \leq \frac{1}{k} \text{ für } n \geq k + 2$$

Auf diese Weise hat schon Archimedes den Umfang bzw. Inhalt eines Kreises mit Hilfe einbeschriebener von unten, umbeschriebener regelmässiger n-Ecke von oben approximiert. Das Verfahren der Babylonier zur näherungsweisen Berechnung von Quadratwurzel gibt dagegen die Rekursion durch eine Formel direkt an. Die Korrektheit des Verfahrens ist aber ebensowenig direkt einsichtig wie die Genauigkeit der Approximation (die auch nicht besser ist).

6.4 Intervallschachtelung

Eine *Intervallschachtelung* in einem angeordneten Körper wird gegeben durch zwei Folgen $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ und $(b_n \mid n \in \mathbb{N})$ von rellen Zahlen so, dass gilt

- $a_n \leq a_m \leq b_m \leq b_n$ für alle $n \leq m$
- Zu jedem $k > 0$ in $\mathbb{N}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b_n - a_n \leq \frac{1}{k}$

d.h. die a_n liefern eine aufsteigende untere Begrenzung, die b_n eine absteigende obere Begrenzung und die Grenzen kommen sich immer näher. Die Intervallschachtelung ist *rational*. wenn alle a_n, b_n rational sind. Wir sagen, c wird durch die Intervallschachtelung *approximiert*, wenn $a_n \leq c \leq b_n$ für alle n. Wir halten nun folgende Mindestanforderung an $\mathbb{R}$ fest

(1) *Jede reelle Zahl kann durch eine rationale Intervallschachtelung approximiert werden.*

(2) *Jede Intervallschachtelung approximiert mindestens eine reelle Zahl.*

Durch (1) und (2) ist die Existenz unendlich kleiner und unendlich grosser reeller Zahlen nicht ausgeschlossen. Diese *infinitesimalen* Zahlen haben für die Entwicklung der Differential- und Integralrechnung nach Leibniz und Newton eine grosse Rolle gespielt und sind in der Notation z.B. als dx noch präsent - insbesondere in den Anwendungen in Naturwissenschaft und Technik. Seit ca. 150 Jahren hat sich jedoch die Archimedische Sichtweise durchgesetzt, weil man in ihr eher zu einer präzisen Darstellung kommt. Dennoch ist der Gebrauch infinitesimaler Grössen legitim, wo er sich auf eine verlässliche Intuition oder ein entsprechend entwickeltes logisches Instrumentarium stützt.

6.5 Archimedische Prinzipien

Die folgenden, auf Eudoxos und Archimedes zurückgehenden Postulate an einen angeordnetem Körper K sind alle äquivalent:

(3) Ist $x \in K$ und gilt $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \geq 1$ in $\mathbb{N}$, so ist $x = 0$.

(3') Ist $x > 0$ in K, so gibt es ein $n \geq 1$ in $\mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < x$

(4) Zu jedem $x \in K$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $z \in \mathbb{Z}$ mit $z \leq x < z + 1$

(5) Sind $a, b \in K$ und $a > 0$, so gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $b \leq ma$

(6) Zu allen $a < b$ in K gibt es $q \in \mathbb{Q}$ mit $a < q < b$

(7) Jede Intervallschachtelung approximiert höchstens eine reelle Zahl

Ein angeordneter Körper, in dem (3)-(7) gelten, heisst *archimedisch*.

Die Bedeutung von (3,3') bzw. (4,5) ist, dass es in K keine unendlich kleinen bzw. grossen Zahlen gibt. (5) kann man auch so formulieren: Mit einem Maßstab, sei er auch noch so klein, kann man durch hinreichend oft wiederholtes Anlegen jede Länge übertreffen. (6) liest man auch so: $\mathbb{Q}$ *liegt dicht* in K. Aus (3) folgt sofort (7). Umgekehrt folgt (3) aus (7) (mit $a_n = 0$, $b_n = \frac{1}{n}$).

(3') ist äquivalent zu (3), da $x \not\leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < x$. Der Rest ist nämlich reine Logik: "Wenn Student x alle Übungen bearbeitet hat, so besteht er die Klausur" bedeutet dasselbe wie "Wenn Student x die Klausur nicht besteht, so hat er mindestens eine Übung nicht bearbeitet".

Aus (3) folgt (4), daraus (5) und aus diesem wieder (3') d.h. sie sind alle äquivalent: Hat man $x > 0$, so auch $\frac{1}{x} > 0$ und es gibt nach (3') ein n mit $\frac{1}{n} < \frac{1}{x}$, also $x < n$. Wähle das kleinste solche n und setze $z = n - 1$. Ist $x < 0$, so bestimmen wir $m \in \mathbb{N}$ mit $m - 1 < -x \leq m$ und wählen $z = -m$. Die Eindeutigkeit von z folgt mit elementarer Arithmetik. Hat man $a, b > 0$, so bestimme nach (4) ein z mit $z \leq x = \frac{b}{a} < z + 1$. Dann $0 < x$ also $m = z + 1 \in \mathbb{N}$ und $b \leq ma$. Ist $0 < x$, so gibt es nach (5) ein m mit $\frac{1}{x} \leq m \cdot 1$, also $\frac{1}{m+1} < x$.

Zu (6): Sei nun $0 \leq a < b$. Nach (3') gibt es n mit $\frac{1}{n} < \frac{1}{2}(b - a)$ und nach (5) ein m mit $a \leq m\frac{1}{n}$. Wählt man das kleinste solche m, so gilt $a < \frac{m+1}{n} < b$. Ist $b \leq 0$, so wähle man $r \in \mathbb{Q}$ mit $-b < r < -a$ und setze $q = -r$. Umgekehrt hat man nach (6) zu $x > 0$ ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $0 < q < x$, also $q = \frac{m}{n}$ und $0 < \frac{1}{n} \leq q < x$.

6.6 Dezimaldarstellung

Sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Eine *dezimale Intervallschachtelung* ist von der Form

$$a_n = z_0 + z_1 10^{-1} + z_2 10^{-2} + \ldots + z_n 10^{-n}, \quad b_n = a_n + 10^{-n}$$

$$z_0 \in \mathbb{Z}, \quad z_k \in \{0, 1, \ldots, 9\} \text{ für } n = 1, 2, \ldots \text{ und nicht alle } = 9$$

Zu jeder Zahl in einem archimedisch angeordneten Köper gibt es eine eindeutig bestimmte dezimale Intervallschachtelung

Sei $x \in K$. Wir finden zunächst mit Archimedes Hilfe ein eindeutig bestimmtes $z_0 \in \mathbb{Z}$ mit $z_0 \leq x < z_0 + 1$. Wir gehen nun rekursiv vor. Sind die $z_0, \ldots, z_n$ schon bestimmt so, dass $a_n \leq x < b_n = a_n + 10^{-n}$, so setzen wir

$$z_{n+1} = z \in \{0, 1, \ldots, 9\} \text{ mit } a_n + z \cdot 10^{-(n+1)} \leq x < a_n + (z + 1) \cdot 10^{-(n+1)}$$

wobei z wegen $b_n - a_n < 10^{-n}$ existiert und dann auch eindeutig bestimmt ist. Da wir x in der Regel nur implizit kennen, ist das nicht so einfach, wie es aussieht, und bei Verwendung von Rechenmaschinen aller Art darf man den Ergebnissen nur beschränkt trauen. Für $x = \sqrt{2}$ erhalten wir

$$\begin{array}{llcll}
z_0 = 1 & \text{weil } 1^2 = 1 \leq 2 & \text{und} & 2^2 = 4 & > 2 \\
z_1 = 4 & \text{weil } (1 + \frac{4}{10})^2 = \frac{196}{100} \leq 2 & \text{und} & (1 + \frac{5}{10})^2 = \frac{225}{100} & > 2 \\
z_2 = 1 & \text{weil } (1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100})^2 = \frac{19822}{10000} \leq 2 & \text{und} & (1 + \frac{4}{10} + \frac{2}{100})^2 = \frac{20164}{10000} & > 2
\end{array}$$

Analog hat man die *binäre Intervallschachtelung*

$$a_n = z_0 + z_1 2^{-1} + z_2 2^{-2} + \ldots + z_n 2^{-n}, \quad b_n = a_n + 2^{-n}, \quad z_0 \in \mathbb{Z}, \quad z_k \in \{0, 1\}$$

Das Vorgehen für ein $r \in K$ sieht hier so aus

- Bestimme $z_0 \in \mathbb{Z}$ mit $z_0 \leq r < z_0 + 1$
- Setze $a_0 = z_0$ und $b_0 = z_0 + 1$
- induktiv $a_n = z_0 + z_1 2^{-1} + \ldots + z_n 2^{-n} \leq r < b_n = a_n$ und $0 \leq b_n - a_n \leq 2^{-n}$
- Rekursionschritt
  - entweder $a_{n+1} = (a_n + b_n)/2 \leq r < b_{n+1} = b_n$ und $z_{n+1} = 0$
  - oder $a_{n+1} = a_n \leq r < b_{n+1} = (a_n + b_n)/2$ und $z_{n+1} = 1$

Das funktioniert jedoch nur ‘effektiv’, wenn auch $r \in K$ ‘effektiv’ gegeben ist, d.h. wenn man im Rekursionsschritt entscheiden kann, welcher der beiden Fälle eintritt. Für ‘hypothetische’ r ist es ein ‘hypothetisches’ Verfahren. Um $a \in \mathbb{N}$ binär darzustellen, geht man so vor: Bestimme $b \in \mathbb{N}$ und $r \in \{0,1\}$ mit $a = 2b + r$ (Division durch 2 mit Rest r). Hat b die Binärdarstellung $b = \sum_{k=0}^{m} r_k 2^k$ mit $r_k \in \{0,1\}$ so hat a die Binärdarstellung $a = r + \sum_{k=1}^{m+1} r_{k-1} 2^k$. D.h. stellt man b durch die Ziffernfolge $r_m, \ldots, r_0$ dar, so wird a durch die Ziffernfolge $r_m, \ldots, r_0, r$ dargestellt. Nach Kap.6.3 haben wir

$$1.0110 \leq \sqrt{2} \leq 1.0111$$

6.7 Reelle Zahlen

Eine Intervallschachtelung a_n, b_n ist *rational* wenn $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ für alle n. Gilt

$$a_n \leq a'_n \leq b'_n \leq b_n \quad \text{für alle } n$$

so ist a'_n, b'_n auch eine Intervallschachtelung und eine *Verfeinerung* von a_n, b_n,

Wir sehen, dass aus dem Archimedischen Axiom schon die Approximation (1) durch rationale Intervallschachtelungen folgt. Dies erlaubt uns, eine jede Intervallschachtelung a_n, b_n, bei der nicht schon eines der a_n oder b_n selbst approximiert wird (weil $a_k = a_n$ für alle $k \geq n$ bzw. $b_k = b_n$ für alle $k \geq n$) , durch eine rationale Intervallschachtelung a'_n, b'_n zu verfeinern, für die zusät;ich gilt

$$\text{für alle } n \text{ gibt es } k \text{ mit } a'_n \leq a_k \leq b_k \leq b'_n$$

Sind nämlich $a'_0, \ldots, a'_n$ und $b'_0, \ldots, b'_n$ schon definiert, so gibt es nach Voraussetzung $m \geq k > n$ mit

$$a'_n \leq a_k < a_m \leq b_m < b_k \leq b'_n$$

“Wähle” nach (6) (und dem Prinzip ist der bedingten Auswahl) rationale a'_{n+1} und b'_{n+1} mit

$$a_{n+1} \leq a_k \leq a'_{n+1} \leq a_m \leq b_m \leq b'_{n+1} \leq b_k \leq b_{n+1}$$

Korollar 6.1 *Die folgenden Aussagen sind für einen angeordneten Körper K äquivalent*

(i) K ist archimedisch angeordnet und jede Intervallschachtelung approximiert mindestens ein Element von K

(ii) Jede rationale Intervallschachtelung approximiert genau ein Element von K.

Einen archimedisch angeordneten Körper, der (i) bzw. (ii) erfüllt, nennt man *vollständig*.

Prinzip 6.2 *Bis auf Isomorphie gibt es höchstens einen archimedisch und vollständig angeordneten Körper. Dieser lässt sich aus der Menge der Intervallschachtelungen von $\mathbb{Q}$ durch Abstraktion konstruieren, wobei zwei Intervallschachtelungen identifiziert werden, wenn sie eine gemeinsame rationale Verfeinerung haben. Andererseits lässen sich die Axiome eines angeordneten Körpers und (ii) auch für den Skalarenbereich der Elementargeometrie (aus anschaulich stimmigen) Axiomen der Elementargeometrie beweisen.*

$$\boxed{\text{‘Diesen’ angeordneten Körper wollen wir } \mathbb{R} \text{ nennen.}}$$

Beweisskizze für die Isomoprhie, d.h. sind K und K' archimedisch und vollständigangeordnet, so gibt es eine umkehrbar eindeutige Zuordnung $r \mapsto r'$ zwischen K und K' so, dass

$$(r+s)' = r' + s', \quad (rs)' = r's', \quad r' < s' \Leftrightarrow r < s$$

Wir dürfen annehmen, dass $\mathbb{Q}$ in K und K' enthalten ist und definieren

> $r \mapsto r'$ genau dann, wenn es eine rationale Intervallschachtelung gibt, die r in K und r' in K' approximiert.

Wir zeigen nur, dass diese Zuordnung wohldefiniert ist. Seien a_n, b_n und c_n, d_n rationale Intervallschachtelngen, die beide r in K approximieren, und in K' die erste r', die zweite r''. Dann ist $\max\{a_n, c_n\}, \min\{b_n, d_n\}$ eine gemeinsame rationale Verfeinerung, die r in K approximiert und ein $s \in K'$. Also approximieren sowohl a_n, b_n als auch c_n, d_n dieses s in K'. Wegen der Eindeutigkeit (ii) gilt $r' = s$ und $r'' = s$, also $r' = r''$. $\square$

6.8 Quadratur des Kreises

Nichtrationale Intervallschachtelungen ergeben sich natürlich bei geometrischen Fragestellungen. Für einen Kreis von Radius r bezeichne $p(r)$ den Umfang, $F(r)$ die Fläche. Einem solchen Kreis können wir durch fortlaufende Halbierung zu jedem $n \geq 2$ ein regeläßiges 2^n-Eck einbeschreiben. Seine Fläche und Umfang wollen wir mit $\underline{F}_n(r)$ bzw. $\underline{p}_n(r)$ notieren. Legen wir in jedem Eckpunkt die Tangente an den Kreis, so liefern die Schnittpunkte aufeinanderfolgender Tangenten ein dem Kreis umbeschriebenes regelmäßiges 2^n-Eck, dessen Fläche wir mit $\overline{F}_n(r)$, dessen Umfang mit $\overline{p}_n(r)$ notieren.

Satz. (Archimedes) *Für jeden Radius r haben wir die Intervallschachtelungen $\underline{F}_n(r), \overline{F}_n(r)$ und $\underline{p}_n(r), \overline{p}_n(r)$, die $F(r)$ bzw. $p(r)$ approximieren.*

Korollar. (Archimedes) *Die Umfänge zweier Kreise stehen im gleichen Verhältnis wie ihre Radien. Der Inhalt eines Kreises mit Radius r und Umfang p ist $\frac{1}{2}rp$.* Die Konstante $\frac{p}{2r}$ ist unter dem Namen π bekannt. Archimedes hat gezeigt

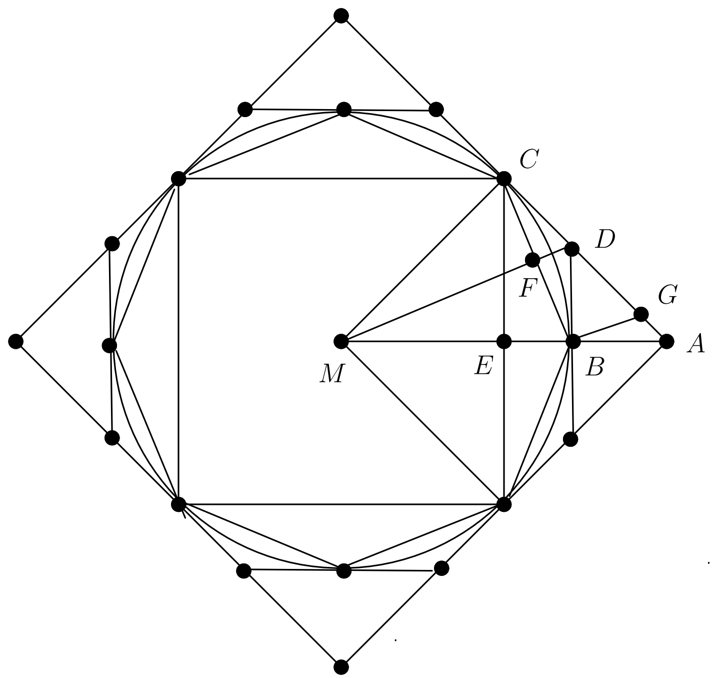
$$\frac{25344}{8068} < \pi < \frac{29376}{9347}$$

Nach Lindemann (Math.Ann. 1882) ist aber π nicht Nullstelle eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten, also insbesondere nicht rational. Auch gibt es keine Möglichkeit mit Zirkel und Lineal aus dem Radius ein flächengleiches Rechteck zu konstruieren.
Beweis. Wir folgern zunächst das Korollar aus dem Satz. Bezeichne $\underline{s}_n(r)$ bzw. $\overline{s}_n(r)$ die Kantenlänge des ein- bzw. umbeschriebenen 2^n-Ecks mit Radius r, also

$$\underline{p}_n(r) = 2^n \underline{s}_n(r), \quad \overline{p}_n(r) = 2^n \overline{s}_n(r)$$

Die durch das Zentrum des Kreises und eine Kante gegebenen Dreiecke sind allesamt ähnlich (weil zwei gleiche Schenkel den 2^n-ten Teil des Vollwinkels einschliessen), also gilt für $y > 0$

$$\underline{p}_n(yr) = y\underline{p}_n(r) \leq yp(r) \leq y\overline{p}_n(r) = \overline{p}_n(yr)$$



d.h. $p(yr)$ und $yp(r)$ werden durch dieselbe Intervallschachtelung approximiert und es folgt $p(yr) = yp(r)$. Hinsichtlich der Flächen lehrt uns die Geometrie, wenn $\underline{h}_n(r)$ bzw. $\overline{h}_n(r)$ die Länge der Lote vom Zentrum auf die Kanten des ein- bzw. umbeschriebenen 2^n-Ecks bedeutet

$$\underline{F}_n(r) = 2^n\frac{1}{2}\underline{s}_n(r)\underline{h}_n(r) \le \frac{1}{2}p(r)r \le 2^n\frac{1}{2}\overline{s}_n(r)\overline{h}_n(r) = \overline{F}_n(r)$$

also werden $F(r)$ und $\frac{1}{2}p(r)r$ durch dieselbe Intervallschachtelung approximiert und sind folglich gleich.

Es bleibt der Satz zu zeigen, wobei wir die Abängigkeit von r nicht mehr notieren müssen. Durch geometrische Überlegungen erhalten wir

$$\overline{p}_{n+1} - \underline{p}_{n+1} \le \frac{1}{2}(\overline{p_n} - \underline{p_n}), \quad \overline{F}_{n+1} - \underline{F}_{n+1} \le \frac{1}{2}(\overline{F_n} - \underline{F_n})$$

In der Skizze haben wir $n = 2$, aber die Argumentation ist allgemeingültig. Sei G der Schnittpunkt der Parallelen zu MD durch B mit der Geraden durch AC. Dann liegt G zwischen A und D und $|DG| = |CD|$ nach dem Strahlensatz. Wegen $|CD| = |DB|$ folgt

$$\overline{s}_{n+1} - \underline{s}_{n+1} = |CD| + |DB| - |CB| = |CG| - |CB|$$

$$\le |CA| - |CB| \le |CA| - |CE| = \frac{1}{2}(\overline{s}_n - \underline{s}_n)$$

weil $CE \perp MA$, und damit die erste Behauptung. Da $|CD| \le |DA|$ und da die Dreiecke CDB und DAB dieselbe Höhe haben, folgt für die Flächen $|CDB| \le |DAB|$ und somit

$$\frac{1}{2^{n+2}}(\overline{F}_{n+1} - \underline{F}_{n+1}) = |CDB| \le \frac{1}{2}|ACE| = \frac{1}{4}\frac{1}{2^n}(\overline{F}_n - \underline{F}_n)$$

und die zweite Behauptung. Also für $2^n \ge k\max\{\frac{1}{r}, \frac{1}{r^2}\}$

$$\overline{p}_n - \underline{p}_n \le \frac{1}{2^{n-2}}(\overline{p}_2 - \underline{p}_2) \le \frac{1}{2^{n-2}}8r \le \frac{1}{k}$$

$$\overline{F}_n - \underline{F}_n \le \frac{1}{2^{n-2}}(\overline{F_2} - \underline{F_2}) \le \frac{1}{2^{n-2}}2r^2 \le \frac{1}{k}$$

Schliesslich zeigt die Geometrie

$$\underline{p}_n \le \underline{p}_{n+1} \le p \le \overline{p}_{n+1} \le \overline{p}, \quad \underline{F}_n \le \underline{F}_{n+1} \le F \le \overline{F}_{n+1} \le \overline{F}$$

wobei wir bei Umfang und Inhalt des Kreises die Anschauung bemühen müssen, da diese Begriffe ja garnicht definiert wurden. □

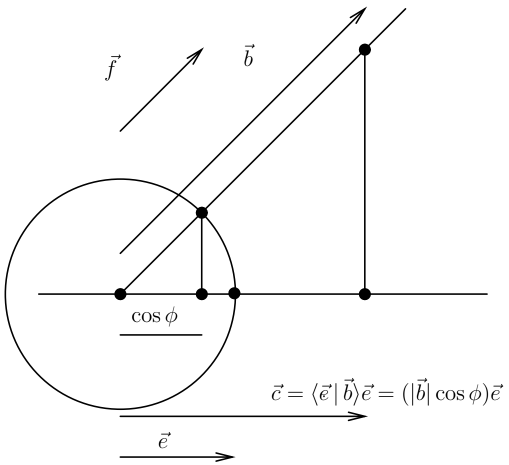
7 Skalarprodukt

7.1 Richtungskomponenten

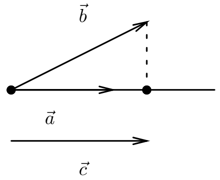
Wir setzen voraus, dass wir über Längengleichheit $\|PQ\| = \|RS\|$ von Pfeilen reden können und die üblichen Aussagen der Kongruenzgeometrie erfüllt sind. Insbesondere sind also gegenüberliegende Seiten eines Parallelogramms gleich lang und wir können auch darüber reden, dass zwei Vektoren gleich lang sind ($\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$, und dann auch $\|r\vec{a}\| = \|r\vec{b}\|$). Das passende Gerät um Längengleichheit festzustellen, ist der Zirkel oder ein Band. Das erlaubt uns, rechte Winkel und Orthogonalität von Vektoren einzuführen

- $\angle QPR$ ist *recht* genau dann, wenn $P = Q$ oder wenn es $Q' \ne Q$ auf der Geraden durch PQ gibt mit $\|PQ\| = \|PQ'\|$, $\|RQ\| = \|RQ'\|$
- $\vec{a} \perp \vec{b}$ genau dann, wenn ein/alle $\angle QPR$ mit $\overrightarrow{PQ} = \vec{a}$, $\overrightarrow{PR} = \vec{b}$ recht sind
- $\vec{a} \perp \vec{b}$ genau dann, wenn $\vec{b} \perp \vec{a}$
- Zu jeder Geraden g mit Richtungsvektor $\vec{a}$ und Punkt Q gibt es genau einen Punkt R auf g (den *Fusspunkt des Lotes* von Q auf g) so, dass $\overrightarrow{RQ} \perp \vec{a}$

Damit können wir nun den auch physikalisch grundlegenden Begriff der *Komponente* $\vec{c}$ eines Vektor $\vec{b}$ in der durch einen Vektor $\vec{a}$ gegebenen Richtung definieren durch die Bedingungen



$\vec{c} = r\vec{a}$ für ein $r \in \mathbb{R}$, $(\vec{b} - \vec{c}) \perp \vec{a}$



In der Tat, ist $\vec{a} \neq \vec{0}$, so wähle man einen Punkt O und g als die Gerade durch O mit Richtungsvektor $\vec{a}$ und $Q = \vec{b} + O$. Dann ergibt sich $\vec{c}$ eindeutig als $\vec{c} = \overrightarrow{OR}$ mit dem Fusspunkt R des Lotes von Q auf g. Ist $\vec{a} = \vec{0}$, so auch $\vec{c} = \vec{0}$.

7.2 Skalares Produkt

Sei nun zusätzlich eine Längeneinheit festgelegt, z.B. dadurch dass wir einem bestimmten Pfeil OE die Länge 1 zuschreiben. Um die Länge eines beliebigen Vektors $\vec{v} = \overrightarrow{PQ} \neq \vec{0}$ zu bestimmen, konstruieren wir auf der Geraden g durch $O' = P$ und Q einen Punkt E' mit $\|O'E'\| = \|OE\|$ und setzen

$$\|\vec{v}\| = |r| \quad \text{mit } \vec{v} = r\overrightarrow{O'E'} \quad \text{wobei } |r| = \begin{cases} r & \text{falls } r \geq 0 \\ -r & \text{falls } r < 0 \end{cases}$$

Der Nullvektor $\vec{0}$ ist der einzige Vektor der Länge 0. Das *skalare* oder *innere Produkt* $\langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle$ definieren wir zunächst für einen Spezialfall durch folgende Beziehung

$$\langle \vec{e} \mid \vec{b} \rangle \vec{e} \text{ ist die Komponente von } \vec{b} \text{ in Richtung } \vec{e} \text{ falls } \|\vec{e}\| = 1$$

Schreiben wir

$$\cos\phi := \langle \vec{e} \mid \vec{f} \rangle \quad \text{falls } \|\vec{f}\| = 1,\ \vec{b} = \|\vec{b}\|\vec{f}$$

so haben wir

$$\langle \vec{e} \mid \vec{b} \rangle = \|\vec{b}\| \cos\phi = \|\vec{e}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\phi$$

Die Bedeutung von ϕ und cos muss man mit Hilfe des Anschauung aus der Skizze entnehmen. Erwünscht sind für ein allgemein definiertes Skalarprodukt die Regeln

$$\begin{array}{ll} (E1) & \langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle = \langle \vec{b} \mid \vec{a} \rangle \\ (E2) & \langle \vec{a} \mid s\vec{b} \rangle = s\langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle \\ (E3) & \langle \vec{a} \mid \vec{b} + \vec{c} \rangle = \langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle + \langle \vec{a} \mid \vec{c} \rangle \\ (E4) & \langle a \mid a \rangle > 0 \text{ für } \vec{a} \neq 0 \end{array}$$

Diese verifizieren wir leicht falls $\vec{a} = 1$ - und in (E1) auch $\|\vec{b}\| = 1$ - vgl. die Skizzen. Da wir mit $\vec{e} = \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}$ einen Vektor der Länge 1 erhalten, sind wir wegen (E1-2) gezwungen, das Skalarprodukt so zu definieren

$$\langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \langle \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a} \mid \vec{b} \rangle$$

und rechnen sofort nach, das (E1-4) auch dafür gelten. Mit obiger Schreibweise ergibt sich die beliebte Formel

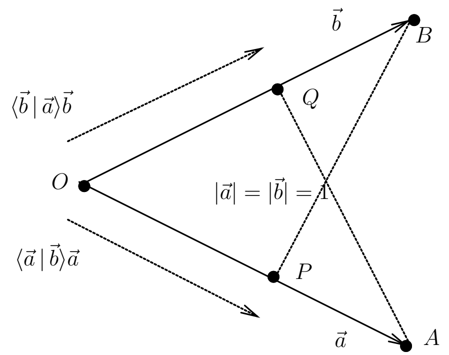
$$\langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\phi$$

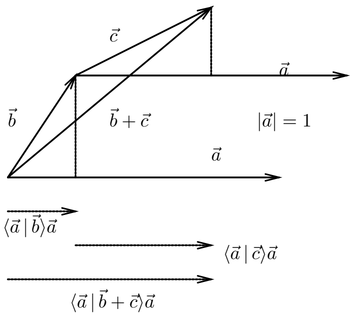
$\vec{a} \cdot \vec{b}$ ist eine andere Schreibweise für das Skalarprodukt. Es folgt

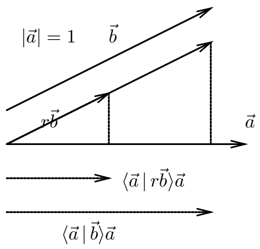
$$\frac{\langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a} \text{ ist die Komponente von } \vec{b} \text{ in Richtung } \vec{a}$$

$$\langle \vec{a} \mid \vec{a} \rangle = \|\vec{a}\|^2, \quad \|\vec{a}\| = \sqrt{\langle \vec{a} \mid \vec{a} \rangle}, \quad \langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle = 0 \text{ genau dann, wenn } \vec{a} \perp \vec{b}$$

Zum Nachweis von (E1), (E3) und (E2) siehe folgende Skizzen







7.3 Ungleichungen

Als Einübung auf späteres rein axiomatisches Vorgehen, wollen wir die folgenden geomertrischen Aussagen ausschliesslich mit (V1-8) und (E1-4) herleiten, Insbesondre ist $\|\vec{a}\|$ und $\perp$ wie oben aus dem Skalarprodukt definiert.

Satz 7.1

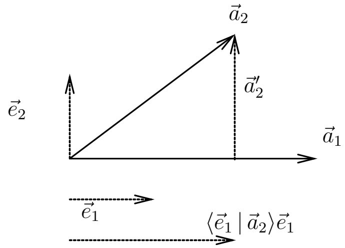
- $\|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 \;\Leftrightarrow\; \vec{a}\perp\vec{b}$ — Pythagoras
- $(\vec{b}-\vec{c})\perp\vec{a}$ *und* $\|\vec{b}-\vec{c}\| = \min\{\|\vec{b}-\lambda\vec{a}\| \mid \lambda\in\mathbb{R}\}$ *für* $\vec{c} = \frac{\langle\vec{a}\,|\,\vec{b}\rangle}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a}$ — Lot
  $\|\vec{b}-\lambda\vec{a}\| = \|\vec{b}-\vec{c}\|$ *genau dann, wenn* $\lambda\vec{a}=\vec{c}$
- $|\langle\vec{a}\,|\,\vec{b}\rangle| \le \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|$ — Cauchy-Schwarz
  und Gleichheit genau dann, wenn $\vec{a}\parallel\vec{b}$
- $\|\vec{a}+\vec{b}\| \le \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ — Dreiecksungleichung
  und Gleichheit genau dann, wenn $\vec{a}=\vec{0}$ *oder* $\vec{b}=r\vec{a}$ *mit* $r\ge 0$

Beweis. Pythagoras: $\|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = \langle\vec{a}+(-1)\vec{b}\mid\vec{a}+(-1)\vec{b}\rangle =_{(E3)} \langle\vec{a}\mid\vec{a}\rangle + \langle\vec{a}\mid(-1)\vec{b}\rangle + \langle(-1)\vec{b}\mid\vec{a}\rangle + \langle\vec{b}\mid\vec{b}\rangle =_{(E1,2,4)} \|\vec{a}\|^2 - 2\langle\vec{a}\mid\vec{b}\rangle + \|\vec{b}\|^2$. Somit gilt $\|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2$ genau dann, wenn $2\langle\vec{a}\mid\vec{b}\rangle = 0$, d.h. wenn $\langle\vec{a}\mid\vec{b}\rangle=0$.

Lot: $\langle\vec{a}\,|\,\vec{b}-\vec{c}\rangle = \langle\vec{a}\,|\,\vec{b}\rangle - \langle\vec{a}\,|\,\vec{c}\rangle = 0$ und nun mit Pythagoras $\|\vec{b}-\vec{c}\|^2 \le \|\vec{b}-\vec{c}\|^2 + \|\vec{c}-\lambda\vec{a}\|^2 = \|\vec{b}-\vec{c}+\vec{c}-\lambda\vec{a}\|^2 = \|\vec{b}-\lambda\vec{a}\|^2$. Und Gleichheit gilt genau dann, wenn $\|\vec{c}-\lambda\vec{a}\|^2=0$.

Cauchy-Schwarz: Ist $\vec{a}=\vec{0}$ oder $\vec{b}=\vec{0}$, so ist die Behauptung trivial. Andernfalls können wir nach der Bilinearität $\|\vec{b}\|=1$ annehmen. Setze $\rho=\langle\vec{a}\,|\,\vec{b}\rangle$. Dann $0\le\|\vec{a}-\rho\vec{b}\|^2 = \langle\vec{a}-\rho\vec{b}\,|\,\vec{a}-\rho\vec{b}\rangle = \|\vec{a}\|^2 - \rho\langle\vec{a}\,|\,\vec{b}\rangle - \rho\langle\vec{b}\,|\,\vec{a}\rangle + \rho^2\|\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2-\rho^2$, also $|\rho|\le\|\vec{a}\|$. Und es gilt $|\rho|=\|\vec{a}\|$ genau dann, wenn $\|\vec{a}-\rho\vec{b}\|=0$.

Dreiecksungleichung: $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \langle\vec{a}\,|\,\vec{a}\rangle + \langle\vec{a}\,|\,\vec{b}\rangle + \langle\vec{b}\,|\,\vec{a}\rangle + \langle\vec{b}\,|\,\vec{b}\rangle \le \|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| + \|\vec{b}\|^2 = (\|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|)^2$. Da beide Seiten der Dreiecksungleichung ≥ 0 sind, folgt diese durch Wurzelziehen. Gilt die Gleichheit, so folgt $\langle\vec{a}\,|\,\vec{b}\rangle = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|$, also nach Cauchy-Schwarz $\vec{a}=\vec{0}$ oder $\vec{b}=r\vec{a}$. Dann aber $r\|\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\ge 0$ und somit $r\ge 0$. □



7.4 Orthonormalbasen

Vektoren $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ des Raumes bilden eine *Orthonormalbasis*, wenn sie Länge 1 haben und paarweise aufeinander senkrecht stehen, d.h.

$$\langle\vec{e}_i\,|\,\vec{e}_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{falls } i\neq j \end{cases}$$

Dass sie insbsondere eine Basis α bilden, ist geometrisch klar. Analog für die Ebene. Bilden $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ eine Basis einer Ebene, so erhält man eine ON-Basis mit

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\|\vec{a}_1\|},\quad \vec{e}_2 = \frac{1}{\|\vec{a}_2'\|}\vec{a}_2' \quad \text{wobei } \vec{a}_2' = \vec{a}_2 - \langle\vec{e}_1\,|\,\vec{a}_2\rangle\vec{e}_1$$

Bilden $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ eine Basis des Raumes, so muss man nun $\vec{a}_3$ orthogonal auf die von $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ aufgepsante Ebene projizieren und dann den Lotvektor normieren, um $\vec{e}_3$ zu erhalten

$$\vec{a}_3' = \vec{a}_3 - \langle\vec{e}_1\,|\,\vec{a}_3\rangle\vec{e}_1 - \langle\vec{e}_2\,|\,\vec{a}_3\rangle\vec{e}_2,\quad \vec{e}_3 = \frac{1}{\|\vec{a}_3'\|}\vec{a}_3'$$

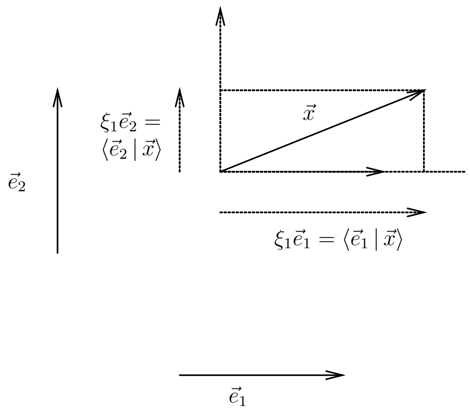
Die Koordinaten von Vektoren, Skalarprodukt und Länge berechnen sich nun für $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$ und $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3$ einfach so

$$\boxed{\begin{array}{lcl} y_i & = & \langle\vec{e}_i\,|\,\vec{y}\rangle \\ \langle\vec{x}\,|\,\vec{y}\rangle & = & x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \\ \|\vec{x}\| & = & \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2} \end{array}}$$

Das zweite rechnet man einfach nach, das dritte folgt dann sofort, ebenso das este (indem man $\vec{e}_i$ für $\vec{x}$ einsetzt - hier kann man auch geometrisch argumentieren).

$$\langle x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3\,|\,y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3\rangle = \sum_{i,j}\langle x_i\vec{e}_i\,|\,y_j\vec{e}_j\rangle = \sum_{i,j} x_iy_j\langle\vec{e}_i\,|\,\vec{e}_j\rangle$$

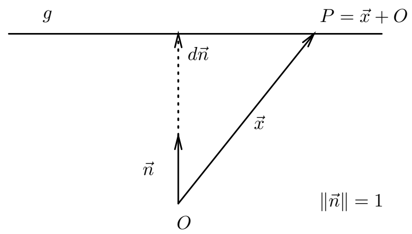
In der Ebene geht es genauso mit nur 2 Koordinaten.



7.5 Normalenvektoren von Geraden bzw. Ebenen

Sei ein Punkt O der Ebene als Ursprung ausgezeichnet. Zu gegebenem Skalar d und *Normalen-Vektor* $\vec{n} \neq 0$ betrachten wir die Punktmenge

$$g = \{\vec{x} + O \mid \langle x\,|\,n\rangle = d\}$$



Durch Multiplikation von $\vec{n}$ mit $\pm\frac{1}{\|\vec{n}\|}$ können wir erreichen, dass gilt

$$\|\vec{n}\| = 1, \;\; d \geq 0 \qquad \text{Hessesche Normal(en)form}$$

Dann ist g die Gerade mit Paramterdarstellung

$$r\vec{v} + A \quad \text{ wobei } \vec{0} \neq \vec{v} \perp \vec{n}, \;\; \vec{a} = d\vec{n}, \; A = \vec{a} + O$$

In der Tat, $\vec{n}, \vec{v}$ ist eine Basis, d.h. mit der eindeutigen Darstellung $\vec{x} = x_1\vec{n} + x_2\vec{v}$ gilt $\langle\vec{x}\,|\,\vec{n}\rangle = x_1$ und somit $\langle\vec{x}\,|\,\vec{n}\rangle = d$ genau dann, wenn $\vec{x} = x_2\vec{v} + \vec{a}$.

Geht man von einer Parameterdarstellung $r\vec{v} + A$ mit $A = \vec{a} + O$ aus, so bestimme man $\vec{0} \neq \vec{v}^{\perp} \perp \vec{v}$ und dann $\vec{n} = \pm\frac{1}{\|\vec{v}^{\perp}\|}\vec{v}^{\perp}$ so, dass $d = \langle\vec{a}\,|\,\vec{n}\rangle \geq 0$.

d ist der Abstand der Geraden g von Punkt O. Hat man einen Punkt $P = \vec{p} + O$. so ist $\langle\vec{p}\,|\,\vec{n}\rangle\vec{n} + O$ der Fußpunkt des Lotes von P auf die Gerade durch O mit Richtung $\vec{n}$, also

$$d - \langle\vec{p}\,|\,\vec{n}\rangle \;\; \text{Abstand des Punktes } P = \vec{p} + O \text{ von der Geraden } g$$

Ist zudem eine Orthonormalbasis $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ der Ebene gegeben, so schreibt sich die Hessesche Normalenform in Koordinaten bzgl. dieser so

$$g = \{x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + O \mid x_1n_1 + x_2n_2 = d\} \quad \text{wobei } \vec{n} = n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2$$

Entsprechend geht es mit Ebenen im Raum, zwei zum Normalenvektor $\vec{n}$ senkrechten, nicht parallelen Richtungsvektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ und 3 Koordinaten:

$$E = \{r_1\vec{v}_1 + r_2\vec{v}_2 + A \mid r_1, r_2 \in \mathbb{R}\} = \{\vec{x} + O \mid \langle\vec{x}\,|\,\vec{n}\rangle = d\}$$
$$= \{x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 + O \mid x_1n_1 + x_2n_2 + x_3n_3 = d\}$$

wobei $\vec{n} = n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2 + n_3\vec{e}_3$ und $d = \langle\vec{a}\,|\,\vec{n}\rangle$ mit $A = \vec{a} + O$. Falls $d \geq 0$, so ist $|\langle p\,|\,n\rangle - d|$ der Abstand des Punktes $\vec{p} + O$ von E.

7.6 Euklidische Vektorräume

Ist auf einem reellen Vektorraum V eine Zuordnung

$$(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \langle\vec{x}\,|\,\vec{y}\rangle \in \mathbb{R}$$

so erklärt, dass die Axiome (E1)-(E4) gelten, sprechen wir von einem *euklidsichen Vektorraum* und es gelten die Aussagen von Kap.7.3 mit demselben Beweis. Ist V n-dimensional ($n < \infty$), so kann man wie in Kap.7.4 von einer Basis ausgehend eine Orthonormalbasis konstruieren. Rechnet man mit Koordinaten bzgl. einer Orthonormalbasis, so ergibt sich das Skalarprodukt als

$$\langle\vec{x}\,|\,\vec{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i.$$

Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ wird zum euklidischen Vektorraum mit den *kanonischen Skalarprodukt*

$$\langle\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

und die kanonische Basis ist orthonormal. Hat man also in einem euklidischen Vektorraum eine Orthonormalbasis gegeben, so darf man so tun, als ob das $\mathbb{R}^n$ mit dem kanonischen Skalarprodukt wäre. Von Interesse sind aber nach wie vor hauptsächlich die Fälle $n = 2, 3$.

7.7 Winkel

Die Definition von $\cos\phi$ als $\langle\vec{e}\,|\,\vec{f}\rangle$, wobei $\|e\| = \|f\| = 1$ und ϕ irgendwie für den Winkel zwischen $\vec{e}$ und $\vec{f}$ steht, ist formal korrekt, aber auch ziemlich nichtssagend. Wenn wir $\cos\phi$ als Funktion von ϕ verstehen wollen, müssen wir zunächst Winkeln eindeutig reelle Zahlen ϕ zuordnen. Wir betrachten jetzt nur Winkel in der Ebene. Für die Ebene müssen wir eine *Orientierung* vorgeben. das können wir im Moment nur anschaulich machen: bei Draufsicht geht die Orientierung gegen den Uhrzeigersinn.

Eine präzise Behandlung von Orientierung wird sich aus den Determinanten ergeben. Es gibt genau 2 mögliche Orientierungen: welche man kann die Orientierung durch Angabe einer Basis festlegen: diese Basis ist dann im Sinne dieser Orientierung positiv orientiert.

Damit hat man dann auch die Determinantenfunktion festgelegt und ein Paar $\vec{a}, \vec{b}$ von Vektoren ist positiv orientiert genau dann, wenn $\det(\vec{a}, \vec{b}) > 0$.

Tragen wir die Vektoren $\vec{e}$ und $\vec{f}$ an einem Punkt M an, so erhalten wir die Punkte A und B auf dem Kreis um M mit Radius 1. Wir konstruieren nun eine Intervallschachtelung a_n, b_n in $[0, 2\pi]$ und Punkte A_n und B_n auf dem Kreis. Das Verfahren ist die fortlaufende Halbierung der Winkel.

- $a_0 = 0,\ b_0 = 2\pi$ und $A_0 = A = B_0$.
- Seien a_n, b_n und die Punkte A_n, B_n schon konstruiert, so dass die Gerade g durch MB zwischen den Geraden durch MA_n und MB_n verläuft (im Sinne der Orientierung), so sei X der Schnitt der Winkelhalbierenden dieser beiden Geraden mit dem Kreis und
  - Verläuft g zwischen MA_n und MX so: $A_{n+1} = A_n$, $B_{n+1} = X$, $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = b_n - \frac{1}{2}(b_n - a_n)$
  - Verläuft g zwischen MX und MB_n so: $A_{n+1} = X$, $B_{n+1} = B_n$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}(b_n - a_n)$, $b_{n+1} = b_n$

Auf diese Weise wird B eine eindeutig bestimmte reelle Zahl in $\phi \in [0, 2\pi)$ zugeordnet - im Falle $A = B$ nehmen wir $\phi = 0$. Und umgekehrt wird B eindeutig durch ϕ bestimmt - bei gegebenem A und M. Diese Zahl ist auch unabhängig von der Lage des Dreiecks AMB - bei Beibehaltung der Orientierung! Das kann man elemetargeometrisch leicht beweisen. Also dürfen wir ϕ als ein Maß für den Winkel $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ zwischen den Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{MA}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{MB}$ benutzen:

$$\phi = \angle(AMB) = \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle CND$$

für jedes zu AMB kongruente und gleichorientierte Dreieck CND. ϕ gibt den Anteil der Kreisbogens AB am Kreisumfang an und heißt daher das *Bogenmaß*. Dieses Bogenmaß passt auch zu der Addition von Winkeln:

> Liegen A, B, C auf dem Kreis um M mit Radius 1 im Uhrzeigersinn angeordnet, und ist r das Bogenmaß von AMB, s das von BMC, so ist $r + s$ das Bogenmaß von AMC - falls $r + s \geq 2\pi$ ist stattdessen $r + s - 2\pi$ zu nehmen, d.h. man *addiert modulo* 2π.

7.8 Sinus und Co

Sei nun eine Ebene und für sie eine Orientierung der Winkelmessung gegeben. Sei weiterhin eine positiv orientierte Orthonormalbasis $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ gegeben. Eine Zahl $\phi \in [0, 2\pi)$ bestimmt dann eindeutig einen Vektor $\vec{x}$ der Länge 1 mit $\phi = \angle(\vec{e}_1, \vec{x})$ (nämlich $\vec{e}_1 = \overrightarrow{MA}$, $\vec{x} = \overrightarrow{MB}$, $\phi = \angle(AMB)$) und wir definieren

$$\cos\phi = \langle \vec{e}_1 \mid \vec{x} \rangle, \quad \sin\phi = \langle \vec{e}_2 \mid \vec{x} \rangle \qquad \text{wobei } \|\vec{x}\| = 1,\ \phi = \angle(\vec{e}_1, \vec{x})$$

und diese Definition hängt nur von ϕ und nicht von der Wahl der Orthonormalbasis ab. Insbesondere gilt

$$\cos 0 = 1 \sin\frac{\pi}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0 = \sin\pi = \sin 0, \quad \cos\pi = -1 = \sin\frac{3\pi}{2}$$

Die Definition lässt sich auch auf beliebige $\phi \in \mathbb{R}$ ausdehnen

$$\cos\phi = \cos\psi, \quad \sin\phi = \sin\psi \quad \text{falls } \phi - 2z\pi = \psi \in [0, 2\pi)$$

Es gilt dann

$$(\sin\phi)^2 + (\cos\phi)^2 = 1$$

$$\cos -\phi = \cos\phi, \quad \sin -\phi = -\sin\phi$$

$$\cos(\phi + \frac{1}{2}\pi) = -\sin\phi, \quad \sin(\phi + \frac{\pi}{2}) = \cos\phi$$

Für einige Winkel kann man dann cos und sin über Pythagoras bestimmen

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Die Definition hängt aber auch nicht von der Orientierung ab: Wählt man die umgekehrt orientierte Basis $\vec{e}_1, -\vec{e}_2$, so bleibt $\langle \vec{e}_1 \mid \vec{x} \rangle$ unverändert und $\langle -\vec{e}_2 \mid \vec{x} \rangle = -\langle \vec{e}_2 \mid \vec{x} \rangle$. Da aber bei der Winkelmessung in der entegegengestetzten Orientierung das Bogenmaß ϕ durch $2\pi - \phi$ bzw. $-\phi$ ersetzt wird, kommt man zum gleichen Ergebnis $\cos\angle(AMB)$ und $\sin\angle(AMB)$ ein vorgegebenes Dreieck AMB, wie bei der ersten Orientierung.

Wir definieren *Tangens* und *Cotangens* durch

$$\tan\phi = \frac{\sin\phi}{\cos\phi} \text{ falls } \cos\phi \neq 0, \qquad \cot\phi = \frac{\cos\phi}{\sin\phi} \text{ falls } \sin\phi \neq 0$$

7.9 Arcus

Ein Vektor $\vec{x}$ mit $\|x\| = 1$ und hat bzgl. einer positiv orientierten Orthonormalbasis der euklidischen Ebene die Koordinaten

$$x_1 = \cos\phi, \quad x_2 = \sin\phi \quad \text{wobei } \phi = \angle(\vec{e}_1, \vec{x})$$

also kann das Bogenmaß $\phi \in [(0, 2\pi)$ eindeutig aus dem Paar $(\cos\phi, \sin\phi)$ bestimmt werden

$$(\cos\phi, \sin\phi) = (x_1, x_2) \mapsto \vec{x} \mapsto \phi = \angle(\vec{e}_1, \vec{x}) \in [0, 2\pi)$$

Schränkt man den erlaubten Wert von ϕ ein, kommt man auch mit weniger Information aus

$$x_1 \mapsto \phi = \arccos x_1 \in [0, \pi] \quad x_1 \in [-1, 1]$$

$$x_2 \mapsto \phi = \arcsin x_2 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad x_2 \in [-1, 1]$$

$$\frac{x_2}{x_1} \mapsto \phi = \arctan\frac{x_2}{x_1} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \quad \frac{x_2}{x_1} \in \mathbb{R},\ x_1 \neq 0$$

$$\frac{x_1}{x_2} \mapsto \phi = \operatorname{arccot}\frac{x_1}{x_2} \in (0, \pi) \quad \frac{x_1}{x_2} \in \mathbb{R},\ x_2 \neq 0$$

7.10 Polarkoordinaten in der Ebene

In der euklidischen Ebene sei eine positiv orientierte Orthonormalbasis $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ gegeben. Außerdem ein Ursprung O, damit man Vektoren als Ortsvektoren bzw. Punkte veranschaulichen kann. Für einen Vektor $\vec{x}$ definieren wir

$$r = \|\vec{x}\|, \quad \phi = \arg \vec{x} = \angle(\vec{e}_1, \frac{1}{\|\vec{x}\|}\vec{x})$$

Dann folgt

$$x_1 = \langle \vec{e}_1 \,|\, \vec{x} \rangle = r\cos\phi, \quad x_2 = \langle \vec{e}_2 \,|\, \vec{x} \rangle = r\sin\phi$$

also ist $\vec{x}$ durch seine *Polarkoordinaten* r (den *Betrag*) und ϕ (das *Argument*) eindeutig bestimmt. Mit den Argumenten rechnet man wie gehabt modulo 2π, d.h. $\phi + 2z\pi$ mit $z \in \mathbb{Z}$ ist genauso gut.

$$\arg \vec{x} = \begin{cases} \arctan \frac{x_2}{x_1} & \text{falls } x_1 > 0 & \text{Hauptwert} \\ \pi + \arctan - \frac{x_2}{x_1} & \text{falls } x_1 < 0 & \text{Nebenwert} \\ \frac{\pi}{2} & \text{falls } x_1 = 0, x_2 > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{falls } x_1 = 0, x_2 < 0 \end{cases} \quad \text{für } \vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 \neq \vec{0}$$

Die Fallunterscheidung ist entbehrlich, wenn man $\arctan x_2/x_1$ als Funktion in den beiden Variablen x_1, x_2 versteht, also als eine etwas missverständliche aber weit verbreitete Schreibweise für $\arg \vec{x}$.

8 Determinanten in Ebene und Raum

8.1 Orientierung

In einer Ebene oder im Raum wird eine Orientierung durch Auszeichnung einer Basis und der zulässigen Deformationen angegeben; dabei kommt beim Anschauungsraum die "Rechte Hand Regel" zur Anwendung. "Orientierte" Flächen bzw. Volumina ergeben sich dann als Determinanten, axiomatisch durch (D1-4) bestimmt. Eine Besonderheit des dreidimensionalen Raumes ist das Vektor- oder äussere Produkt (besonders ist, dass es als Operation im Raum verstanden werden kann). Als Koordinatensysteme benutzen wir hier positiv orientierte Orthonormalbasen. Bezüglich eines solchen lassen sich dann Determinanten und Vektorprodukt koordinatenweise berechnen.

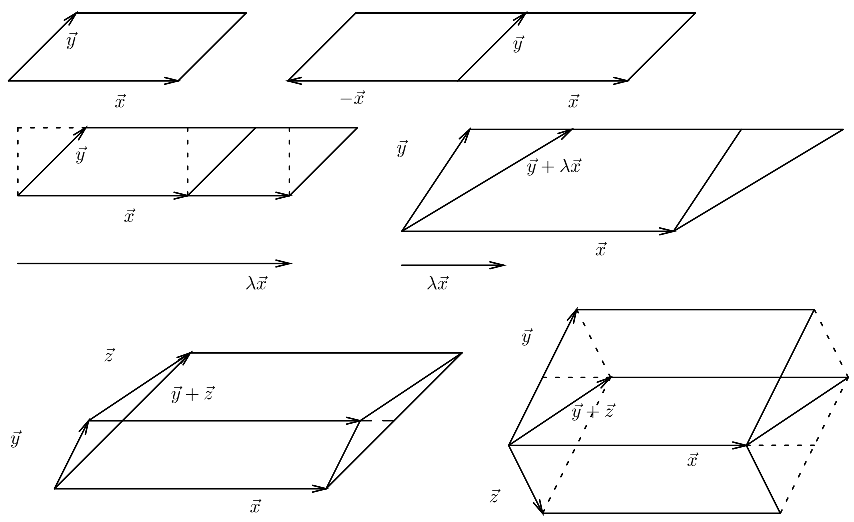
8.2 Sinus und Co

Siehe Kap.7.8

8.3 Flächen

Setzt man für Quadrate mit Seitenlänge 1 den Flächeninhalt 1 fest, so ergibt sich (nach Archimedes) der Flächeninhalt eines Parallelogramms als gh, wobei g die Länge einer (Grund)Seite und h die Länge einer dazu senkrechten Höhe bezeichnet. (Überlegen Sie sich auch mal einen Beweis!) Wir definieren die *Determinante*

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = \epsilon F \quad = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \sin\phi$$



wobei ϕ der Winkel zwischen (den Ortsvektoren) $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist, F die Fläche des von ihnen aufgespannten Parallelogramms und $\epsilon = 1$ falls $0 < \phi < \pi$ (*Rechtssystem*) bzw. $\epsilon = -1$ falls $\pi < \phi < 2\pi$ (*Linkssystem*). Es gilt für $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, in der gegebenen Ebene gilt (vgl Fig.) die Scherungsinvarianz

$$\det(\vec{a}, \vec{b} + r\vec{a}) = \det(\vec{a}, \vec{b}) = \det(\vec{a} + s\vec{b}, \vec{b})$$

d.h. die Grundfläche ändert sich weder nach Betrag noch nach Vorzeichen, wenn man $\vec{b}$ längs einer Parallelen zu $\vec{a}$ schert, Weiterhin

$$(D1) \quad \det(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = \det(\vec{a}, \vec{b}) + \det(\vec{a}, \vec{c}), \ \det(\vec{b} + \vec{c}, \vec{a}) = \det(\vec{b}, \vec{a}) + \det(\vec{c}, \vec{a})$$

$$(D2-3) \quad \det(\vec{a}, r\vec{b}) = r\det(\vec{a}, \vec{b}) = \det(r\vec{a}, \vec{b}), \quad \det(\vec{a}, \vec{a}) = 0$$

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \ \Leftrightarrow \ \vec{a}, \vec{b} \text{ parallel }, \quad \det(\vec{b}, \vec{a}) = -\det(\vec{a}, \vec{b})$$

wie man aus (D1-3) leicht beweist. Z.B. $\det(\vec{a}, \vec{b} + r\vec{a}) = \det(\vec{a}, \vec{b}) + \det(\vec{a}, r\vec{a}) = \det(\vec{a}, \vec{b}) + r\det(\vec{a}, \vec{a}) = \det(\vec{a}, \vec{b}) + r0$. Bei "$\Rightarrow$" muss man allerdings vorausetzen, dass es überhaupt Vektoren gibt mit $\det(\vec{x}, \vec{y}) \neq 0$. Auch die Scherungsinvarianz lässt sich aus (D1-3) herleiten. Wählt man als Koordinatensystem der Ebene eine Orthonormalbasis $\vec{e_1}, \vec{e_2}$, die ein Rechtssystem ist, so gilt

$$(D4) \quad \det(\vec{e_1}, \vec{e_2}) = 1$$

und man kann die Determinante aus den Koordinaten berechnen

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

nämlich $\det(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2, b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2) = \det(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2, b_1\vec{e}_1) + \det(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2, b_2\vec{e}_2) = \det(a_1\vec{e}_1, b_1\vec{e}_1) + \det(a_2\vec{e}_2, b_1\vec{e}_1) + \det(a_1\vec{e}_1, b_2\vec{e}_2) + \det(a_2\vec{e}_2, b_2\vec{e}_2) = 0 + a_2b_1\det(\vec{e}_2, \vec{e}_1) + a_1b_2\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + 0 = -a_2b_1 + a_1b_2$.

Ungekehrt wird durch die Auszeichnung einer Orthonormalbasis als Koordinatensystem die Orientierung der Ebene angegeben und ein Flächenmaß eingeführt

$$\vec{a}, \vec{b} \left\{ \begin{array}{l} \text{positiv orientiert} \\ \text{negativ orientiert} \\ \text{linear abhängig} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{b}) = \left\{ \begin{array}{l} > 0 \\ < 0 \\ = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{Fläche Parallelogramm}(\vec{a}, \vec{b}) = |\det(\vec{a}, \vec{b})|$$

8.4 Vektorprodukt

Ein Tripel unabhängiger Vektoren bildet ein *Rechtssystem* im Raum, wenn ihre Richtungen (in der gegebenen Reihenfolge) mit den Richtungen von gestrecktem Daumen und Zeigefinger und abgewinkeltem Mittelfinger der rechten Hand identifiziert werden können - Beweglichkeit des Daumens bis zu 180^o gegenüber dem Zeigefinger vorausgesetzt. Entsprechend hat man *Linkssysteme* für die linke Hand. Jedes unabhängige Tripel von Vektoren bildet entweder ein Rechts- oder ein Linkssystem . Welche Hand die rechte ist, ist mathematisch gesehen jedoch eine Frage der Definition: es wird irgendein unabhängiges Tripel zum Rechtssystem deklariert und dadurch die *Orientierung* festgelegt. Alle anderen Rechtssysteme ergeben sich hieraus durch Drehung des Tripels insgesamt und stetigen Scherungen eines der Vektoren gegen die beiden anderen, bei denen die drei Vektoren in keinem Stadium in eine gemeinsame Ebene zu liegen kommen. Wir definieren nun das *Vektor-* oder *äussere Produkt* $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ durch die Bedingungen

$$\|\vec{c}\| = |det(\vec{a}, \vec{b})|, \ \vec{c} \perp \vec{a}, \vec{b} \ \text{ und } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ Rechtssystem oder abhängig.}$$

Unmittelbar geometrisch einsichtig sind die Regeln

$$(G1-2) \ \ \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b} \text{ parallel }, \ \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$G3) \ \ r(\vec{a} \times \vec{b}) = (r\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (r\vec{b})$$

Es folgt wie bei den ebenen Determinanten die Scherungsinvarianz

$$\vec{a} \times (\vec{b} + r\vec{a}) = \vec{a} \times \vec{b} = (\vec{a} + s\vec{b}) \times \vec{b}$$

(d.h. $\det(\vec{a}, \vec{b})$, Normale und Orientierung bleiben unverändert) und daraus dann die Distributivgesetze

$$(G4) \quad \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}, \quad (\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{a}.$$

Zum Beweis des ersten Distributivgesetztes dürfen wir zunächst annehmen, dass $\|\vec{a}\| = 1$. Nach Scherung darf man $\vec{b} \perp \vec{a}$ annehmen, ebenso $\vec{c} \perp \vec{a}$. Dann liegen $\vec{b}$ und $\vec{c}$ in einer Ebene mit Normale $\vec{a}$ und man erhält $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{c}$, $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})$ in dieser Ebene, indem man b, $\vec{c}$ und $\vec{b} + \vec{c}$ jeweils um 90^0 dreht. (vgl. Folie)

Eine typische Anwendung des Vektorprodukts ist es, aus zwei nicht parallelen Richtungsvektoren $\vec{b}, \vec{c}$ einer Ebene einen Normalenvektor $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{c}$ zu berechnen. Wählt man als Koordinatensystem des Raumes ist eine Orthonormalbasis $\alpha : \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, die Rechtssystem ist, so hat man

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \ \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \ \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$$

und die Koordinatendarstellung

$$\vec{a} \times \vec{b} = a_1b_2\vec{e}_3 + b_1a_3\vec{e}_2 + a_2b_3\vec{e}_1 - a_3b_2\vec{e}_1 - b_3a_1\vec{e}_2 - a_2b_1\vec{e}_3$$

$$\vec{a} \times \vec{b}^\alpha = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \quad \text{für } \vec{a}^\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b}^\alpha = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Beweis durch Ausmultiplizieren (Übung!)

8.5 Grassmannscher Entwicklungssatz

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \langle \vec{a} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{a}.$$

Beweis. Wegen der Linearitätseigenschaften von Skalar- und Vektorprodukt bleibt die Gültigkeit der Formel beim Übergang zu Linearkombinationen erhalten: gelten z.B. $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \langle \vec{a} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{a}$ und $(\vec{a}' \times \vec{b}) \times \vec{c} = \langle \vec{a}' \,|\, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{a}'$ für gegebene Vektoren $\vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{c}$, so gelten auch $(r\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = r\langle \vec{a} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle r\vec{a}$ und $((\vec{a} + \vec{a}') \times \vec{b}) \times \vec{c} = \langle \vec{a} + \vec{a}' \,|\, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle (\vec{a} + \vec{a}')$.

Man rechnet nämlich nach, dass $(r\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (r(\vec{a} \times \vec{b})) \times \vec{c} = r((\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}) = r(\langle \vec{a} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{a}) = r\langle \vec{a} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{b} - r\langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{a} = r\langle \vec{a} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle (r\vec{a}) = \langle r\vec{a} \,|\, \vec{b} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle r\vec{a}$ und $((\vec{a} + \vec{a}') \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a}' \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{a}' \times \vec{b}) \times \vec{c} = \langle \vec{a} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{a} + \langle \vec{a}' \,|\, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{a}' = (\langle \vec{a} \,|\, \vec{c} \rangle + \langle \vec{a}' \,|\, \vec{c} \rangle) \vec{b} - \langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle (\vec{a} + \vec{a}') = \langle \vec{a} + \vec{a}' \,|\, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle (\vec{a} + \vec{a}')$. Entsprechend verfährt man bei Linearkombinationen von $\vec{b}$'s bzw. $\vec{c}$'s .

Sind $\vec{a}, \vec{b}$ linear abhängig, z.B. $\vec{b} = r\vec{a}$, so rechnet mabn für beide Seiten sofort $\vec{0}$ aus. Andernfalls ist $\vec{c}$ Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$. Damnit reduziert sich die Aufgabe auf den Fall, dass $\vec{c}$ einer dieser Vektoren ist. Ausssrdem dúrfen wir $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 1$ annehmen. Für $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ hat man auf beiden Seiten sofort $\vec{0}$. Sei also $\vec{c} = \vec{a}$. $\vec{d} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}$ liegt nun in der Ebene $\perp \vec{a} \times \vec{b}$, d.h. in der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten, und ist senkrecht zu $\vec{a}$. Die Länge von $\vec{d}$ ist die Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms. also dessen Höhe (wegen $\|\vec{a}\| = 1$). Damit $\vec{d} = \pm(\vec{b} - \langle \vec{a} \,|\, \vec{b} \rangle \vec{a})$, wegen der Orientierung gilt $+$. Das beweist die Gleichung in diesem Fall. Für $\vec{c} = \vec{b}$ gehts entsprechend, nur ist jetzt die Orientierung andersherum.

Alternativ: Es genügt, den Fall zu betrachten, dass $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ Vektoren aus einer positiv orientierten Orthonormalbasis sind. Ist $\vec{b} = \pm\vec{a}$, so $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, also $LS = \vec{0} = RS$. Sei also $\vec{a} \neq \pm\vec{b}$. Dann ist $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ eine positiv orientierte ON-Basis und $\vec{c} = \vec{a}$, $\vec{c} = \vec{b}$ oder $\vec{c} = \pm\vec{a} \times \vec{b}$. Ist $\vec{c} = \vec{a}$, so $LS = \vec{b}$, da $\vec{a} \times \vec{b}, \vec{a}, \vec{b}$ positiv orientiert (zyklische Vertauschung!), und $RS = \vec{b}$, da $\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = 1, \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = 0$. Ist $\vec{c} = \vec{b}$ so $LS = -\vec{a}$, da $\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b}, \vec{a}$ negativ orientiert, und $RS = -\vec{a}$, da $\langle \vec{a} \,|\, \vec{c}\rangle = 0, \langle \vec{b} \,|\, \vec{c}\rangle = 1$. Ist $\vec{c} = \pm\vec{a}\times\vec{b}$, so $LS = \vec{0}$ und $\langle \vec{a} \,|\, \vec{c}\rangle = \langle \vec{b} \,|\, \vec{c}\rangle = 0$, also auch $RS = \vec{0}$. Es folgt

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) + \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) + \vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{0} \;\; \textit{Jacobi Identitaet}$$

8.6 Volumen

Nachdem das Volumen des Einheitswürfels als 1 festgelegt ist, ergibt sich das Volumen eines Spats zu “Grundfläche mal Höhe”. Wir definieren nun die *Determinante* oder das *Spatprodukt* als

$$\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \langle \vec{a}\times\vec{b} \mid \vec{c}\rangle = \epsilon V,$$

wobei V das Volumen des von (den Ortsvektoren) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ aufgespannten Spats ist und $\epsilon = 1$, falls $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ Rechtssystem, $\epsilon = -1$, andernfalls. Wegen der Eigenschaften von Vektor- und Skalarprodukt gelten die Regeln $(D1-3)$ und ihre Konsequenzen entsprechend, z.B. $\det(r\vec{a}+s\vec{a}',\vec{b},\vec{c})) = r\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) + s det(\vec{a}',\vec{b},\vec{c})$ d.h. Linearität in der ersten Spalte und entsprechend in den anderen Spalten. Bei zwei gleichen Spalten erhält man in allen 3 möglihcne Fällen Determinante 0. Es folgt Vorzeichenwechsel bei Vertauschung zweier Spalten, z.B. $\det(\vec{b},\vec{a},\vec{c}) = -\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$. Also bleibt die Determinante bei zyklischen Vertauschungen unverändert.

Eine positiv orientierte ONB hat Determinante 1 und es gilt

$$\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1.$$

Wir schreiben auch

$$\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \det A$$

mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Ersetzt man hier c_i durch $\vec{e}_i$, so erhält man das Vektorprodukt $\vec{a}\times\vec{b}$.

Mit Grassmann und Determinante beweist man

$$\langle \vec{a}\times\vec{b} \mid \vec{c}\times\vec{d}\rangle = \langle \vec{a}\,|\,\vec{c}\rangle\langle \vec{b}\,|\,\vec{d}\rangle - \langle \vec{b}\,|\,\vec{c}\rangle\langle \vec{a}\,|\,\vec{d}\rangle \;\textit{Lagrange.}$$

Beweis. $\langle \vec{a}\times\vec{b} \mid \vec{c}\times\vec{d}\rangle = \langle \vec{c}\times\vec{d} \mid \vec{a}\times\vec{b}\rangle = \det(\vec{c},\vec{d},\vec{a}\times\vec{b}) = \det(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c},\vec{d}) = \langle(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} \,|\, \vec{d}\rangle = \langle\langle \vec{a}\,|\,\vec{c}\rangle\vec{b} - \langle \vec{b}\,|\,\vec{c}\rangle\vec{a} \,|\, \vec{d}\rangle = \langle \vec{a}\,|\,\vec{c}\rangle\langle \vec{b}\,|\,\vec{d}\rangle - \langle b\,|\,c\rangle\langle \vec{a}\,|\,\vec{d}\rangle$.

8.7 Übersicht

Skalar mal Vektor ergibt Vektor: $r\vec{a}$. Man könnte auch $\vec{a}r = r\vec{a}$ definieren. Dann gelten alle Rechenregeln, es kann aber in einem Produkt nur ein Vektor auftreten und dividieren darf man durch Vektoren auch nicht. Aber man darf kürzen: Aus $r\vec{a} = r\vec{b}$ folgt $\vec{a} = \vec{b}$ falls $r \neq 0$; aus $r\vec{a} = s^a$ folgt $r = s$ falls $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Das skalare Produkt zweier Vektoren ist ein Skalar: $\langle \vec{a} \mid \vec{b}\rangle$. Das Assoziativgesetz für drei Vektoren: $\vec{a}\langle \vec{b} \mid \vec{c}\rangle = \langle \vec{a} \mid \vec{b}\rangle\vec{c}$ gilt nur, wenn $\vec{a}$ und $\vec{c}$ parallel sind. Kürzen darf man Vektoren auch nicht (und erst recht nicht durch Vektoren dividieren): Aus $\langle \vec{a} \mid \vec{b}\rangle = \langle \vec{a} \mid \vec{c}\rangle$ folgt nur, dass $\vec{a}$ auf $\vec{b}-\vec{c}$ senkrecht steht. Immerhin hat man noch Kommutativität und Distributivität; und Assoziativität soweit nur zwei Vektoren beteiligt sind.

Das Vektorprodukt zweier Vektoren ist ein Vektor: $\vec{a}\times\vec{b}$ im Raum. Statt Kommutativität haben wir Antikommuativität, statt Assoziativität Grassmann. Immerhin gilt noch das Distributivgesetz, und man kann Skalare herausziehen. Aus $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times\vec{c}$ folgt nur, dass $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ linear abhängig sind.

Die Determinante dreier (zweier) Vektoren ist ein Skalar Dabei muss eine Orientierung des Raums (der Ebene) vorgegeben sein. Man hat die Linearitätseigenschaft in jeder Spalte. Aus $det(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 0$ folgt nur, dass $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ linear abhängig sind, d.h. durch Pfeile in einer Ebene repräsentiert werden können,

Die Orientientierung der Ebenen bzw. des Raumes wird durch eine ON-Basis festgelegt. Eine weitere Basis $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ bzw. $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ ist dann positiv orientiert, wenn $\det(\vec{a}_1,\vec{a}_2) > 0$ bzw. $\det(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3) > 0$, andernfalls ist sie negativ orientiert. Im realen Raum können wir die positive Orientierung durch die “Rechte-Hand-Regel” festlegen, für Ebenen in “Draufsicht” durch die “gegen-die-Uhr-Regel”.

9 Komplexe Zahlen

9.1 Motivation

Eine quadratische Gleichung $x^2+px+q=0$ ist gleichbedeutend mit $(x+\frac{p}{2})^2 = \frac{p^2}{4} - q$ (quadratische Ergänzung), also hat man

$$x = -\frac{p}{2} \pm a \quad \text{falls } a^2 = \frac{p^2}{4} - q.$$

Um eine solche Gleichung für beliebige reelle p,q lösen zu können, muss man also nur zu jedem reellen d eine ‘Zahl’ a mit $a^2 = d$ haben. Und dazu genügt es, eine ‘Zahl’ j mit $j^2 = -1$ zu haben. Mithilfe einer solchen ‘imaginären’ Zahl konnten die Mathematiker des Renascimento sogar Gleichungen 3. und 4. Grades lösen. Die Erweiterung von $\mathbb{R}$ und eine solche Zahl j führt zum Körper $\mathbb{C}$ der *komplexen Zahlen.* Dass und wie die Erweiterung möglich ist, wird im nächsten Abschnitt beschrieben. Der für die Elektrotechnik wichtigste Aspekt ist, dass mittels $\mathbb{C}$ die Überlagerungen von Sinusschwingungen gleicher Frequenz komfortabel behandelt werden können. Ein Grund dafür ist, dass die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus zum Distributivgesetz für $\mathbb{C}$ gleichbedeutend sind. Da es ein Lernziel ist, dass Sie im Schlaf mit komplexen Zahlen rechnen können, übernehmen wir aus der Elektrotechnik den Buchstaben j für die imaginäre Einheit (anstelle des in der Mathematik gebräuchlichen i).

9.2 Zahlenebene

Die Vektorrechnung liefert einen handfesten Zugang zu den komplexen Zahlen. Dazu sei in der Ebene, hier die *Zahlenebene* genannt, Skalarprodukt und Orientierung (üblicherweise "gegen die Uhr') gegeben, sowie Ursprung O und eine positiv orientierte Orthonormalbasis $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ gegeben. Dann können wir natürlich zwei "Zahlen" vektoriell addieren. Für eine "Zahl" z, d.h. einen (Orts)Vektor $z = \vec{a}$, sei das *Argument* $\phi = arg(z)$ der Winkel zwischen $\vec{e}_1$ und $\vec{a}$, wobei $0 \leq \phi < 2\pi$ im Sinne der positiven Orientierung gemessen wird. Wir schreiben $|z| = \|z\|$. Dann können wir einen Winkel χ durch eine Zahl "u" mit $|u| = 1$, $\arg(u) = \chi$ eindeutig notieren und die Drehung von Punkten z um den Winkel χ als Multiplikation mit u beschreiben

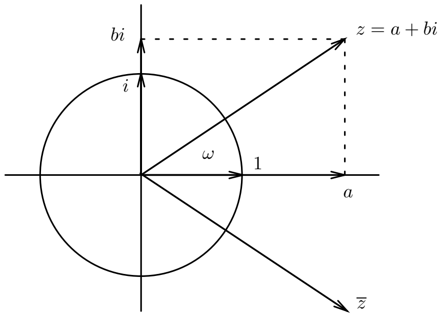
$$uz \text{ hat Länge } |z| \text{ und Argument } \arg(uz) = \arg(u) + \arg(z)$$

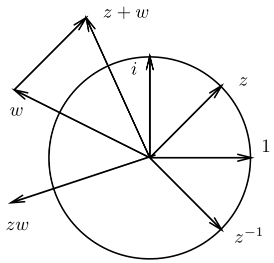
(bis auf Vielfache von 2π). Das motiviert die allgemeine Definition des Produkts

$$zw \text{ hat Länge } |zw| = |z||w| \text{ und Argument } \arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$$

(bis auf Vielfache von 2π). Der Kehrwert ergibt sich dann so

$$z^{-1} \text{ mit } |z^{-1}| = |z|^{-1},\ \arg(z^{-1}) = -\arg(z).$$





Schreibt man $0 = \vec{0}, 1 = \vec{e}_1$ so zeigen einfache geometrische Überlegungen, dass die Körperaxiome gelten: Da wir jedes z als ru mit $|u| = 1$ und $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$ schreiben können. kommt es bei der Multiplikation nur auf Multiplikation mit Zahlen von Länge 1 an, und die können wir als Drehungen verstehen. Z.B. bei $(x + y)u$ mit $|u| = 1$ wird das von x und y aufgespannte Parallelogramm in das von xu und yu aufgespannte gedreht und die Diagonale $x + y$ geht dabei in die Diagonale $xu + yu$ über, also $(x + y)u = xu + yu$.

9.3 Kartesische Darstellung

Die reellen Zahlen kann man auf natürliche Weise mit den Zahlen auf der *reellen Achse* durch O in Richtung $\vec{e}_1$ identifizieren. Schreibt man j (in der Mathematik meist i) für die *imaginäre Einheit* $\vec{e}_2$, so hat jede Zahl eine eindeutige (*kartesische*) Darstellung in der Form

$$z = a + bj, \quad a, b \text{ reell }.$$

Dabei heisst $a = \mathsf{Re}(z)$ der *Realteil*, $b = \mathsf{Im}(z)$ der *Imaginärteil* von z. Die Länge oder der Betrag und das Argument ergeben sich als

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \phi = \arg(a + bj) \Leftrightarrow a = \cos\phi \text{ und } b = \sin\phi$$

und man mag auch $\phi = \arctan b/a$ schreiben, wenn man weiss, wie das gemeint ist. Für das Rechnen mit der imaginären Einheit ergibt die Geometrie

$$j^2 = (-j)^2 = -1, \quad j^3 = 1/j = -j, \ j^4 = 1, \quad 1/-j = j.$$

Dann folgt mit den Körperaxiomem für reelle a, b, c, d

$$(a + bj) + (c + dj) = (a + c) + (b + d)j, \quad (a + bj)(c + dj) = (ac - bd) + (ad + bc)j$$

$$\frac{1}{a + bj} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}j.$$

Ist $z = a + bj$ mit reellen a, b, so heisst $z^* = a - bj$ (auch als $\overline{z}$ geschrieben) , das Spiegelbild an der reellen Achse, die zu z *konjugierte* Zahl und es gilt

$$|z| = \sqrt{zz^*}, \quad \mathsf{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + z^*), \quad \mathsf{Im}(z) = \frac{1}{2j}(z - z^*).$$

Die Konjugation verträgt sich mit Addition und Multiplikation

$$(z + w)^* = z^* + w^*, \quad (zw)^* = z^* w^*$$

Es folgt

$$zw^* + z^*w = 2\mathsf{Re}(zw^*) = 2\mathsf{Re}(z^*w)$$

$$zw^* - z^*w = 2j\mathsf{Im}(zw^*) = -2j\mathsf{Im}(z^*w)$$

9.4 Quadratische Gleichungen

Die Lösungen der Gleichung $z^2 = (c+di)^2 = a+bi$ kann man ganz gut kartesisch angeben; wegen $c^2 + d^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ und $c^2 - d^2 = a$ hat man $2c^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2}$, andererseits $2cdi = bi$, also

$$c = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})}, \quad d = \frac{b}{2c}.$$

Mit der p-q-Formel folgt, dass es zu je zwei komplexe Zahlen p, q komplexe Zahlen x_1, x_2 gibt mit

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$$

nämlich

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm z \quad \text{falls } z^2 = \frac{p^2}{4} - q.$$

Für reelle p, q folgende Fälle möglich

$\frac{p^2}{4} - q = 0$	$x_1 = x_2 \in \mathbb{R}$	$x_{1/2} = -\frac{p}{2}$
$\frac{p^2}{4} - q > 0$	$x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ x_1 \neq x_2$	$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$
$\frac{p^2}{4} - q < 0$	$x_1, x_2 \notin \mathbb{R},\ x_2 = \overline{x}_1$	$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm j\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$

9.5 Polarkoordinaten und Kreisteilung

Für viele Anwendungen bewährt sich folgende *Polardarstellung*

$$z = r\cos\phi + rj\sin\phi = r(\cos\phi + j\sin\phi) = r(\cos(\phi + k2\pi) + j\sin(\phi + k2\pi))$$

mit reellen $r = |z| \geq 0$ und $\phi = \arg(z)$, d.h. dem Winkel im Bogenmass bis auf Vielfache von 2π. Schliesst man $z = 0$ d.h. $r = 0$ aus, so erhält man Eindeutigkeit, durch die Beschränkung der Winkel auf das Intervall $[0, 2\pi)$. Produkt und n-te Potenz schreiben sich so

$$r(\cos\phi + j\sin\phi)s(\cos\psi + j\sin\psi) = rs(\cos(\phi + \psi) + j\sin(\phi + \psi))$$

$$(r(\cos\phi + j\sin\phi))^n = r^n(\cos n\phi + j\sin n\phi) \quad \text{de Moivre.}$$

Folglich erhält man als Lösungen der Gleichung $z^n = r(\cos\phi + j\sin\phi)$ gerade die

$$\sqrt[n]{r}(\cos(\frac{\phi}{n} + \frac{k}{n}2\pi) + j\sin\frac{\phi}{n} + \frac{k}{n}2\pi)),\ \text{mit } k = 0, \ldots, n-1.$$

Insbesondere bilden die Lösungen von $z^n = 1$, die n-ten Einheitswurzeln, ein dem Einheitskreis einbeschriebenes, regelmässiges n-Eck mit Ecke 1.

Als eine bequeme, später zu begründende, Schreibweise hat man auch mit $\phi = \arg(z)$

$$z = |z|(\cos\phi + j\sin\phi) = |z|e^{j\phi} = |z|\exp(j\phi)$$

also

$$\mathsf{Re}(e^{j\phi}) = \cos\phi,\ \ \mathsf{Im}(e^{j\phi}) = \sin\phi$$

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = j$$

und die Multiplikationsvorschrift liest sich dann als Exponentiationsregel

$$|z|e^{j\phi} \cdot |w|e^{j\psi} = |z| \cdot |w| \cdot e^{j(\phi+\psi)},\ \ (|z|e^{j\phi})^n = |z|^n e^{jn\phi}$$

Die Konjugation sieht so aus

$$z^* = |z|e^{-j\phi} \quad \text{für } z = |z|e^{j\phi}$$

und es folgt

$$\cos\phi = \frac{1}{2}(e^{j\phi} + e^{-j\phi}),\ \ \sin\phi = \frac{1}{2j}(e^{j\phi} - e^{-j\phi})$$

9.6 Additionstheoreme

Nach der Definition der Multiplikation und dem Distributivgesetz gilt

$$\cos(\phi + \psi) + j\sin(\phi + \psi) = (\cos\phi + j\sin\phi)(\cos\psi + j\sin\psi)$$

$$= \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi + j(\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\psi)$$

und mit der Eindeutigkeit der kartesischen Darstellung folgt

$$\cos(\phi + \psi) = \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi$$

$$\sin(\phi + \psi) = \sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\psi$$

Es folgt z.B.

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

Zum Beweis setze $\alpha = 2\phi$, $\beta = 2\psi$. Dann $\sin(\phi + \psi)\cos(\phi - \psi)$

$$= (\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\psi)(\cos\phi\cos - \psi - \sin\phi\sin - \psi)$$

$$= \sin\phi\cos\phi(\cos\psi)^2 + (\sin\phi)^2\cos\psi\sin\psi + (\cos\phi)^2\sin\psi\cos\psi + \cos\phi\sin\phi(\sin\psi)^2$$

$$= 2\sin\phi\cos\phi + 2\sin\psi\cos\psi = \sin(\phi + \phi) + \sin(\psi + \psi) = \sin 2\phi + \sin 2\psi$$

da $(\sin\phi)^2 + (\cos\phi)^2 = 1$

9.7 Zusammenfassung

$\mathbb{C}$ ist gegeben durch

(i) die Struktur $(\mathbb{C}, +, -, \mathsf{0}, (z \mapsto rz)_{r\in\mathbb{R}})$ eines $\mathbb{R}$-Vektorraums

(ii) ein Skalarprodukt $\langle\,|\,\rangle$ mit zugehöriger Norm $|z| = \|z\|$, dem *Betrag* von z

(iii) eine Orthonormalbasis $\mathsf{1}, \mathsf{j}$

(iv) die durch $\mathsf{1}, \mathsf{j}$ bestimmte Orientierung und Bogenmaß $\arg z = \angle(\mathsf{1}, \frac{1}{|z|}z)$ für $z \neq 0$

(v) eine Multiplikation $\cdot$ so, dass $\mathsf{0} \cdot z = z \cdot \mathsf{0} = \mathsf{0}$ und für $z \neq \mathsf{0} \neq w$

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|, \quad \arg(z \cdot w) = \arg z + \arg w \text{ modulo } 2\pi$$

Die Abbildung $w \mapsto zw$ bescheibt also eine Drehstreckung in der Ebene mit Zentrum $\mathsf{0}$, Drehwinkel $\arg(z)$ und Streckfaktor $|z|$. Das ist der Grund dafür, dass komplexe Zahlen sich gut zur Beschreibung periodischer Vorgänge eignen. Es folgt

1. $\mathsf{1} \cdot z = z$ *Einheit*, $\quad \mathsf{j} \cdot \mathsf{j} = -1$ *imaginäre Einheit*
2. $r(z \cdot w) = (rz) \cdot w = z \cdot (rw)$ *Algebragesetz*
3. $u \cdot (z + w) = u \cdot z + u \cdot w$ *Distributivität*

4. $\mathbb{C}$ ist ein Körper und
$$|z^{-1}| = |z|^{-1}|, \ \ \arg(z^{-1}) = -\arg z \text{ modulo } 2\pi \text{ für } z \neq \mathsf{0}$$
5. jedes $z \neq \mathsf{0}$ hat eindeutige *Polardarstellung*
$$z = r((\cos\phi)\mathsf{1} + (\sin\phi)\mathsf{j}) \quad \text{mit } r = |z| \text{ und } \phi = \arg z$$
6. Jedes $z \in \mathbb{C}$ hat eindeutige *kartesische* Darstellung $z = a\mathsf{1} + b\mathsf{j}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$,
$a = \mathsf{Re}(z)$ *Realteil*, $b = \mathsf{Im}(z)$ *Imaginärteil*
7. $a\mathsf{1} + b\mathsf{j} = \mathsf{0} \Leftrightarrow a = b = 0$
8. $(a\mathsf{1} + b\mathsf{j}) \cdot (c\mathsf{1} + d\mathsf{j}) = (ac - bd)\mathsf{1} + (ad + bc)\mathsf{j}$
9. $(a\mathsf{1} + b\mathsf{j})^{-1} = (a^2 + b^2)^{-1}a\mathsf{1} - (a^2 + b^2)^{-1}b\mathsf{j}$ falls $a\mathsf{1} + b\mathsf{j} \neq \mathsf{0}$
10. Man kann $a \in \mathbb{R}$ mit $a\mathsf{1} \in \mathbb{C}$ identifizieren. Dabei wird die Struktur von $\mathbb{R}$ erhalten. Insbesondere gilt dann $0 = \mathsf{0}$, $1 = \mathsf{1}$ und $az = a \cdot z$. Wir schreiben nun auch $j = \mathsf{j}$.

Ein anderer Zugang sieht so aus: Auf jedem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$ mit Basis $\mathsf{1}, \mathsf{j}$ lässt sich eine Multiplikation so defineren, dass (1),(2),(3). Es folgt dann, dass $\mathbb{C}$ ein Körper ist und (7), (8), (9) gelten. Es gibt genau ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}$ so, dass $\mathsf{1}, \mathsf{j}$ eine Orthonormalbasis ist (man identifiziere $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ mit dem kanonischen Skalarprodukt). Schließlich gibt es genau eine Orientierung bei der $\mathsf{1}, \mathsf{j}$ positiv orientiert ist. Dann folgen auch (v) und (4),(5).

10 Sinus- und Cosinusfunktionen

10.1 Reelle Funktionen

Auf $\mathbb{R}$ oder einen Intervall definierte reellwertige Funktionen, wir schreiben z.B.
$$f : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = y \in \mathbb{R}, \ (x \in [a, b])$$
werden durch ihren *Graphen* veranschaulicht, die Punktmenge
$$G = \{x\vec{e}_1 + f(x)\vec{e}_2 + O \mid x \in [a, b]\} \,\hat{=}\, \{\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \mid x \in [a, b]\}$$
bzgl. eines Orthonormalen Koordinatensystems $O, \vec{e}_1, \vec{e}_2$ der Ebene. Durch den Graphen G (nicht unbedingt durch die Zeichnung) ist die Funktion f eindeutig bestimmt. Die Bedingungen dafür, dass G der Graph einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist, sind die

- *Wohldefiniertheit:* $\forall\, x \in [a, b]\ \forall\, y, y' \in \mathbb{R}.\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in G$ und $\begin{pmatrix} x \\ y' \end{pmatrix} \in G \Rightarrow y = y'$
- *Überalldefiniertheit:* $\forall\, x \in [a, b]\ \exists\, y \in \mathbb{R}.\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in G$

Wer will, darf auch denken, dass Graph und Funktion dasselbe sind. Die Wohldefiniertheit ist der wesentliche Punkt. Will man sie nachweisen, muss man mit dem Graphen arbeiten: die Schreibweise $y = f(x)$ ist nur unter der Voraussetzung der Wohldefiniertheit erlaubt. Hat man sich einmal auf diese Schreibweise festgelegt, kann man Wohldefiniertheit weder formulieren noch beweisen.

10.2 Vektorraum der reellen Funktionen

Satz 10.1 *Die Menge $\mathbb{R}^X$ aller reellen Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ bildet einen $\mathbb{R}$-Vektorraum, wobei*
$$(f + g)(t) = f(t) + g(t), \ \ (-f)(t) = -f(t), \ \ 0(t) = 0, \ \ (rf)(t) = r \cdot f(t) \quad \textit{für alle } t \in X$$
Der Beweis ist genauso trivial wie für den Vektorraum $\mathbb{R}^n$. □

10.3 Sinusfunktionen

Insbesondere betrachten wir *Sinusfunktionen*
$$f(t) = a\sin(\omega t + \phi) \ \ (t \in \mathbb{R})$$
und die *Cosinusfunktionen*
$$f(t) = a\cos(\omega t + \phi) \ \ (t \in \mathbb{R})$$
mit *Amplitude* $a \geq 0$, *Frequenz* $\omega > 0$ und *Nullphasenwinkel* ϕ.

Satz 10.2 *Die Sinusfunktionen (dasselbe gilt für Cosinusfunktionen) mit fester Frequenz $\omega > 0$ bilden einen Untervektorraum des Raums aller reellen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Eine Basis besteht aus den Funktionen $\sin\omega t$, $\cos\omega t$: jede Sinusfunktion f der Frequenz ω hat eine eindeutige Darstellung der Form (mit $a, b \in \mathbb{R}$)*
$$f(t) = a\sin\omega t + b\cos\omega t$$
Beweis: Unabhängigkeit: $\cos\omega 0 = 1$ also ist $\cos\omega t$ nicht die Nullfunktion. $\cos\omega\frac{\pi}{2\omega} = 0$ und $\sin\omega\frac{\pi}{2\omega} = 1$, also gibt es kein $r \in \mathbb{R}$ so, dass $\sin\omega t = r\cos\omega t$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Also ist jede Darstellung einer Funktion f als Linearkombination von $\cos\omega t$ und $\sin\omega t$ eindeutig - falls sie existiert. D.h. $\cos\omega t$ und $\sin\omega t$ bilden eine Basis des von ihnen aufgespannten Untervektorraums. Nach dem zweiten Additionstheorem gilt
$$a\sin(\omega t + \phi) = a(\cos\phi)\sin\omega t + a(\sin\phi)\cos\omega t$$
also enthält dieser Untervektorraum alle Sinusfunktionen der Frequenz ω. Umgekehrt ist zu zeigen, dass dieser Untervektorraum nur aus solchen besteht, d.h. es ist zu zeigen, dass es zu $b, c \in \mathbb{R}$ solche $a \geq 0$ und ϕ gibt, dass gilt
$$a\sin(\omega t + \phi) = b\sin\omega t + c\cos\omega t$$
also
$$b = a\cos\phi \text{ und } c = a\sin\phi.$$
Nun, das wird durch die Polardarstellung $r = a$, ϕ des Vektors $b\vec{e}_1 + c\vec{e}_2 \,\hat{=}\, \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$ der Ebene erfüllt. □

Korollar 10.3 $a\sin(\omega t + \phi) = a_1\sin(\omega t + \phi_1) + a_2\sin(\omega t + \phi_2)$ *genau dann, wenn* $a = \sqrt{b^2 + c^2}$, $b = a\cos\phi = a_1\cos\phi_1 + a_2\cos\phi_2$ *und* $c = a\sin\phi = a_1\sin\phi_1 + a_2\sin\phi_2$.

10.4 Komplexwertige reelle Funktionen

Ebenso betrachten wir auf $\mathbb{R}$ oder einem Intervall definierte komplexwertige Funktionen eines reellen Arguments t (als Zeit zu denken), z.B.

$$f : [a,b] \to \mathbb{C}, \quad z = f(t) \in \mathbb{C}$$

mit dem Graphen

$$\{t\vec{e}_0 + x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + O \mid t \in [a,b],\ f(t) = x_1 + x_2 j\} \mathrel{\hat{=}} \{\begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix} \mid t \in [a,b],\ z = f(t)\}$$

wobei $O, \vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2$ orthonormales Koordinatensystem des Raumes ist und $\mathbb{C}$ als die Ebene $\{x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + O \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ verstanden wird mit $\vec{e}_1 = 1$ und $\vec{e}_2 = j$. Hier gibt es zwei Möglichkeiten zur Veranschaulichung:

- Der Graph als Kurve im Raum wobei $\{t\vec{e}_0 + O \mid t \in \mathbb{R}\}$ die Zeitachse ist
- Die Punktmenge $\{x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + O \mid t \in [a,b],\ f(t) = x_1 + x_2 j\}$ in der komplexen Zahlenebene, mit Markierung einzelner Punkte durch die zugehörige(n) Zeit(en) t

10.5 Vektorraum der komplexwertigen Funktionen

Satz 10.4 *Die Menge $\mathbb{C}^X$ aller komplexwertigen Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$ bildet einen $\mathbb{C}$-Vektorraum, wobei*

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t),\ \ (-f)(t) = -f(t),\ \ 0(t) = 0,\ \ (rf)(t) = r \cdot f(t) \quad \textit{für alle } t \in X$$

Der Beweis ist genauso trivial wie für den Vektorraum $\mathbb{R}^X$. $\square$

10.6 Komplexwertige Sinusfunktionen

Die interessanten Funktionen sind zunächst für feste Frequenz $\omega \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$

$$e^{j\omega t} = \exp j\omega t = \cos\omega t + j \sin\omega t \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$f(t) = (a + bj)e^{j\omega t} = a\cos\omega t - b\sin\omega t + j(b\cos\omega t + a\sin\omega t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$. Für gegebenes t_0 heisst die komplexe Zahl $f(t_0)$ auch der *Zeiger* der Funktion f zur Zeit t_0.

Lemma 10.5 *Eine Funktion der Form $f(t) = (a + bj)e^{j\omega t}$ ist durch jeden ihrer Zeiger $f(t_0)$ mit Zeitangabe t_0 eindeutig bestimmt. Insbesondere gilt*

$$f(t) = f(0)e^{j\omega t}$$

Beweis. Mit $s = t - t_0$ gilt

$$f(t) = f(t_0 + s) = (a + bj)e^{j\omega(t_0+s)} = (a + bj)e^{j\omega t_0}e^{j\omega s} = f(t_0)e^{j\omega(t-t_0)} \quad \square$$

Die dazu konjugierten Funktionen erhält man so

$$e^{-j\omega t} = \exp -j\omega t = \cos\omega t - j\sin\omega t \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$f^*(t) = f(t)^* = (a - bj)e^{-j\omega t} = a\cos\omega t - b\sin\omega t - j(b\cos\omega t + a\sin\omega t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

Theorem 10.6 *(i) Jede komplexe Linearkombination $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ der Funktionen $\sin\omega t$ und $\cos\omega t$ ist eine komplexe Linearkombination der Funktionen $e^{j\omega t}$ und $e^{-j\omega t}$ und umgekehrt.*

(ii) Das Funktionenpaar $\sin\omega t$ und $\cos\omega t$ ebenso wie $e^{j\omega t}$ und $e^{-j\omega t}$ ist Basis desselben 2-dimensionalen Untervektorraums U der Vektorraums $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ aller komplexwertigen reellen Funktionen.

(iii) Die reellwertigen Funktionen in U sind gerade die reellen Linearkombinationen von $\sin\omega t$ und $\cos\omega t$.

(iv) Jede reelle Linearkombination $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Funktionen $\sin\omega t$ und $\cos\omega t$ hat eine eindeutige Darstellung

$$f(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t = \mathsf{Re}((a - bj)e^{j\omega t}) \ \ (t \in \mathbb{R}) \ \ \textit{mit } a, b, \in \mathbb{R}$$

Beweis. Die beiden Funktionenpaare erzeugen denselben komplexen Untervektorraum. In der Tat

$$\cos\omega t = \mathsf{Re}\, e^{j\omega t} = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}), \quad \sin\omega t = \mathsf{Im}\, e^{j\omega t} = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

Die Unabhängigkeit von $\sin\omega t$ und $\cos\omega t$ folgt wie im Reellen. Also sind beides Basen. Das beweist (i) und (ii).

Lässt man nur die Multiplikation mit reellen Skalaren zu, so wird U zum $\mathbb{R}$-Vektorraum und die reellwertigen Funktionen in U bilden einen $\mathbb{R}$-Untervektorraum W. Dieser enthält $\sin\omega t$ und $\cos\omega t$ hat also $\dim_{\mathbb{R}} W \geq 2$. Seien nun $f_1, \ldots, f_n$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum U linear unabhängig. Wir behaupten, dass sie auch im $\mathbb{C}$-Vektorraum U linear unabhängig sind. Dazu sei

$$(a_1 + b_1 j)f_1 + \ldots + (a_n + b_n j)f_n = 0$$

die Nullfunktion, d.h.

$$0 = (a_1+b_1 j)f_1(t)+\ldots+(a_n+b_n j)f_n(t) = a_1 f_1(t)+\ldots+a_n f_n(t)+j(b_1 f_1(t)+\ldots+b_n f_n(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Also nach der Eindeutigkeit der kartesischen Darstellung

$$a_1 f_1(t) + \ldots + a_n f_n(t) = 0 \text{ und } b_1 f_1(t) + \ldots + b_n f_n(t) = 0$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit im $\mathbb{R}$-Vektorraum W folgt $a_1 = \ldots = a_n = 0$ und $b_1 = \ldots = b_n = 0$, also $a_1 + b_1 j = \ldots = a_n + b_n j = 0$. Das beweist die Unabhängigkeit im $\mathbb{C}$-Vektorraum U. Da $\dim_{\mathbb{C}} U = 2$ muss also $n \leq 2$ gelten. Also $\dim_{\mathbb{R}} W = 2$ und somit bilden die beiden unabhängigen Funktionen $\sin\omega t$ und $\cos\omega t$ eine Basis von W. Das beweist (iii).

Die Darstellung in (iv) ist klar. Die Eindeutigkeit folgt aus der Unabhängigkeit von $\sin\omega t$ und $\cos\omega t$.

Korollar 10.7 *Die folgenden Darstellungen einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind gleichwertig*

$$f(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t \quad \textit{mit } a, b \in \mathbb{R}$$

$$f(t) = r\mathsf{Re}(e^{j(\omega t+\phi)}) = r\cos(\omega t+\phi) \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \textit{mit } r \in \mathbb{R},\ r \geq 0 \textit{ und } \phi \in [0, 2\pi)$$

Die Darstellung ist jeweils eindeutig und die Umformung gegeben durch

$$a = r\cos\phi,\ b = -r\sin\phi$$

Die Funktion $re^{j(\omega t+\phi)} = re^{j\phi}e^{j\omega t}$ heisst auch die zugehörige *komplexe Zeitfunktion* und $re^{j\phi} \in \mathbb{C}$ die *komplexe Amplitude*.

Dass eine reelle Funktion, die komplexe Linearkombination von $\cos\omega t$ und $\sin\omega t$ ist, schon reelle Linearkombination ist, sieht man auch so: Ist

$$f(t) = (a+bj)\cos\omega t + (c+dj) \sim \omega t \in \mathbb{R} \text{ für alle } t$$

so folgt mit $t = 0$ bzw. $t = \frac{\pi}{2}$

$$b = 0 = d$$

Ist

$$f(t) = (a+bj)e^{j\omega t} + (c+dj)e^{j\omega t} \in \mathbb{R} \text{ für alle } t$$

so

$$f(t) = (a+c+(b+d)j)\cos\omega t + (-b+d+(a-c)j) \sim \omega t \in \mathbb{R} \text{ für alle } t$$

also mit $t = 0$ bzw. $t = \frac{\pi}{2}$

$$b+d = 0 = a-c$$

$$f(t) = (a+b)\cos\omega t + (a-b) \sim \omega t$$

10.7 Ellipsen

In der Ebene ist eine *Ellipse* mit Mittelpunkt O eine Punktmenge

$$\{x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + O \mid \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = 1,\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

mit einer Orthonormalbasis $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ und $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ in $\mathbb{R}$. Eine äquivalente Beschreibung ist

$$\{a(\cos\phi)\vec{v}_1 + b(\sin\phi)\vec{v}_2 \mid \phi \in [0, 2\pi)\}$$

mit $a, b \geq 0$ in $\mathbb{R}$, nämlich

$$\lambda_1 = \frac{1}{a^2},\ \ \lambda_2 = \frac{1}{b^2}$$

Dabei heissen $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ die *Hauptachsenrichtungen* und a, b die *Halbachsenlängen*. Die Funktion

$$f(t) = \|a(\cos t)\vec{v}_1 + b(\sin t)\vec{v}_2\|$$

nimmt für $a \neq b$ Maximum bzw. Minimum wie folgt an

$$\max\{f(t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \begin{cases} a = f(0+k\pi) & \text{falls } a > b \\ b = f(\frac{\pi}{2}+k\pi) & \text{falls } b > a \end{cases}$$

$$\min\{f(t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \begin{cases} a = f(0+k\pi) & \text{falls } a < b \\ b = f(\frac{\pi}{2}+k\pi) & \text{falls } b < a \end{cases}$$

d.h. auf den Hauptachsen.

Satz 10.8 *Sind $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ Vektoren der Ebene und $c, d \geq 0$, so ist*

$$\{(\cos\phi)\vec{w}_1 + (\sin\phi)\vec{w}_2 + O \mid \phi \in [0, 2\pi)\}$$

eine Ellipse, falls $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ unabhängig und $c, d > 0$. Andernfalls ergibt sich eine Strecke.

Ein Beweis wird im nächsten Kapitel skizziert.

Korollar 10.9 *Die Bahnkurve $\{f(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ der Funktion*

$$f(t) = re^{j(\omega t+\phi)} + se^{-j(\omega t-\psi)},\ \ r, s \geq 0 \textit{ in } \mathbb{R}$$

ist eine Ellipse oder eine Strecke. Die längere (Länge $r+s$) bzw. kürzere (Länge $r-s$) Halbachse ist gegeben durch die Werte von t mit

$$\omega t = \frac{1}{2}(\psi-\phi) + k\pi \quad \textit{bzw.} \ \ \omega t = \frac{1}{2}(\psi-\phi) + \frac{\pi}{2} + k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})$$

Beweis.

$$|f(t)|^2 = f(t)(f(t)^*) = r^2 + s^2 + 2rs\mathsf{Re}\, e^{j(2\omega t+\phi-\psi)} = r^2+s^2+2rs\cos(2\omega t+\phi-\psi)$$

also Maximum $(r+s)^2$ für $2\omega t+\phi-\psi = 0+2k\pi$ und Minimum $(r-s)^2$ für $2\omega t+\phi-\psi = \pi+2k\pi$. $\square$

11 Abbildungen der Ebene

11.1 Lineare und affine Abbildungen

Eine Abbildung f eines K-Vektorraums V in sich ist *linear*, wenn gilt

- $f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$ für alle $\vec{x}, \vec{y} \in V$
- $f(r\vec{x}) = rf(\vec{x})$ für alle $\vec{x} \in V$ und $r \in K$.

Lemma 11.1 *Gegeben eine Basis $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ von V gibt es eine umkehrbar eindeutige Entsprechung zwischen linearen Abbildungen $f : V \to V$ und Listen $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n$ von Vektoren vermöge*

$$\vec{w}_1 = f(\vec{v}_1), \ldots, \vec{w}_n = f(\vec{v}_n))$$

nämlich

$$(*) \quad f(\vec{x}) = x_1\vec{w}_1 + \ldots + x_n\vec{w}_n \quad \textit{für } \vec{x} = x_1\vec{v}_1 + \ldots + x_n\vec{v}_n$$

Beweis. Ist f linear, so folgt $(*)$ sofort. Umgekehrt rechnet man leicht nach, dass $(*)$ eine lineare Abbildung definiert: Die Wohldefiniertheit folgt aus der Eindeutigkeit der Darstellung für $\vec{x}$. Und z.B. $f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\sum_i (x_i+y_i)\vec{v}_i) = \sum_i (x_i+y_i)\vec{w}_i = \sum_i x_i\vec{w}_i + \sum_i y_i)\vec{w}_i = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$. $\square$

Die *Hintereinanderausführung* von Abbildungen, erst f und dann g bzw. g nach f, notieren wir als

$$(g \circ f)(\vec{x}) = g(f(\vec{x}))$$

Eine *Verschiebung* oder *Translation* im Raum oder in der Ebene ist von der Form

$$f(P) = \vec{v} + P$$

mit dem *Verschiebungsvektor* $\vec{v}$. Eine affine Abbildung ist von der Form

$$f(\vec{x} + O) = \vec{v} + f_0(\vec{x}) + O$$

mit linearer Abbildung f_0 (die nicht von O abhängt). Identifiziert man Punkte als Ortvektoren mit Vektoren bzgl. des Urspungs O, so hat man

$$f(\vec{x}) = \vec{v} + f_0(\vec{x})$$

und kann die affine Abbildung als lineare Abbildung gefolgt von Verschiebung auffassen. Insbesondere ist die Hintereinanderausführung

$$(g \circ f)(\vec{x}) = g(f(\vec{x}))$$

affiner Abbildungen wieder affin - ist $g(\vec{y}) = \vec{w} + g_0(\vec{y})$ so

$$g(f(\vec{x})) = \vec{w} + g_0(\vec{v} + f_0(\vec{x})) = \vec{w} + g_0(\vec{v}) + (g_0 \circ f_0)(\vec{x})$$

Satz 11.2 *In der Ebene ist das Bild einer Geraden unter einer affinen Abbildung eine Gerade oder ein Punkt, das Bild eines Kreises eine Ellipse oder eine Strecke.*

Beweisskizze. Jede lineare Abbildung der Ebene, deren Bild nicht eine Gerade oder Punkt ist, lässt sich als Parallelprojektion einer Ebene in einer passenden Richtung in eine andere Ebene auffassen. Nun mit Overhead - das ist fast eine Parallelprojektion. Satz 10.8 folgt nun: hier geht es um das Bild des Einheitskreises.

11.2 Matrixbeschreibung linearer Abbildungen

Sei eine Basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ der Ebene gegeben. Sind

$$f(\vec{e}_1) = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 \text{ und } f(\vec{e}_2) = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2$$

bekannt, so kann man die Koordinaten $\boldsymbol{y}$ des Bildes $\vec{y} = f(\vec{x})$ aus den Koordinaten $\boldsymbol{x}$ von $\vec{x}$ mithilfe der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

berechnen

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} = A\boldsymbol{x}$$

Umgekehrt wird auf diese Weise eine lineare Abbildung definiert, da

$$A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{z} \quad \text{und} \quad Ar\boldsymbol{x} = rA\boldsymbol{x}$$

Ist B die Matrix eine zweiten linearen Abbildung g, so ergibt sich die Matrix C der Hintereinanderausführung $g \circ f$ aus

$$g(f(\vec{e}_1)) = g(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2) = a_{11}g(\vec{e}_1) + a_{21}g(\vec{e}_2)$$

$$= a_{11}(b_{11}\vec{e}_1 + b_{21}\vec{e}_2) + a_{21}(b_{12}\vec{e}_1 + b_{22}\vec{e}_2) = (a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12})\vec{e}_1 + (a_{11}b_{21} + a_{21}b_{22})\vec{e}_2$$

$$g(f(\vec{e}_1)) = (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21})\vec{e}_1 + (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21})\vec{e}_2$$

Entsprechend

$$g(f(\vec{e}_2)) = (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22})\vec{e}_1 + (b_{11}a_{12} + b_{22}a_{22})\vec{e}_2$$

$$BA := C = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix} = (B\boldsymbol{a}_1 \; B\boldsymbol{a}_2) \text{ für } A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix}.$$

Da $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ folgt sofort die Assoziativität der Matrizenmultiplikation

$$D(BA) = (DB)A$$

11.3 Inverse Matrix

Die *identische Abbildung* $\vec{y} = \mathsf{id}(\vec{x}) = \vec{x}$ wird durch die *Einheitsmatrix*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Es folgt

Korollar 11.3 *Sind f und g mit den Matrixen A und B gegeben, so ist g die Umkehrabbildung von f, d.h. $g \circ f = \mathsf{id}$ und $f \circ g = \mathsf{id}$, genau dann wenn*

$$BA = E \textit{ und } AB = E$$

Lemma 11.4 *Zu gegebenen A gibt es B mit $BA = E = AB$ genau dann, wenn*

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$$

B ist dann eindeutig bestimmt als

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

und das lineare Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ hat die eindeutige Lösung $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$.

A heisst dann *invertierbar, regulär* oder *nicht-singulär*, A^{-1} die zu A *inverse* Matrix und $\det A$ die *Determinante* von A. Beweis. Ist $\det A \neq 0$ so $A^{-1}A = E = AA^{-1}$ durch einfaches Nachrechnen. Und ist $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ so $A^{-1}\boldsymbol{b} = A^{-1}A\boldsymbol{x} = E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$. Sei nun $\det A = 0$, also $a_{11}a_{22} = a_{21}a_{12}$. O.B.d.A. ist $a_{11} \neq 0$- sonst vertausche man Zeilen bzw. Spalten. Subtraktion von $a_{21}a_{11}^{-1}$ mal der ersten Zeile von der zweiten ergibt in der neuen zweiten Zeile die Einträge 0 und

$$a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} = 0$$

also hat das homogene System $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ keine eindeutige Lösung. □

11.4 Affine Abbildungen in der Zahlenebene

In der Zahlenebene $\mathbb{C}$ lassen sich einige Arten von Abbildungen besonders komfortabel beschreiben. Wir notieren, ob die Abbildung Längen (L), orientierte Winkel (oW), nicht orientierte Winkel (W) erhält

- *Translation*: $f(z) = z + \alpha$ mit festem $\alpha \in \mathbb{C}$ — L, oW
- *Ursprungsspiegelung* $f(z) = -z$ — L, oW
- *Drehung* mit Zentrum 0: $f(z) = \alpha z$ mit $|\alpha| = 1$ — L, oW
- *Spiegelung an reeller Achse*: $f(z) = z^*$ — L, W
- *Streckung*: $f(z) = rz$ mit $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$ — oW
- *Drehstreckung* mit Zentrum 0: $f(z) = \alpha z$ — oW
- *Ganzlineare Abbildung*: $f(z) = \alpha z + \beta$ mit $\alpha \neq 0$ — oW

Eine Drehstreckung ist also eine Drehung gefolgt von einer Streckung, eine ganzlineare Abbildung ist eine Drehstreckung gefolgt von einer Translation.

Korollar 11.5 *Ganzlineare Abbildungen sind affin. Sie überführen Geraden in Geraden und Kreise in Kreise - bzw. in Punkte falls* $\alpha = 0$

Drehstreckungen mit anderem Zentrum bzw. Spiegelungen an anderen Geraden erhält man, indem man mit Verschiebung bzw. Drehung in die bekannte Situation übergeht, dort ausführt und dann wieder zurückgeht

- Drehstreckung mit Zentrum ζ: $f(z) = \alpha(z - \zeta) + \zeta = \alpha z + \zeta(1 - \alpha)$
- Spiegelung an Gerade durch 0 mit Steigungswinkel ϕ: $f(z) = \alpha(\alpha^{-1}z)^* = \alpha^2 z^*$ mit $\alpha = \cos\phi + j\sin\phi$
- Spiegelung an Gerade durch ζ mit Steigungswinkel ϕ: $f(z) = \alpha^2(z^* - \zeta^*) + \zeta$

11.5 Komplexe Zahlen als Drehstreckungen

Die Summe $f + g$ von zwei linearen Abbildungen f, g der Ebene definieren wir als

$$(f + g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x})$$

und rechnen leicht nach, dass $f + g$ wieder linear ist. Fassen wir die Ebene als $\mathbb{C}$ auf, und sind f, g Drehstreckungen mit Zentrum 0

$$f(z) = \alpha z, \quad g(z) = \beta z$$

so ist

$$(f + g)(z) = \alpha z + \beta z = (\alpha + \beta)z$$

wieder eine Drehsteckung, und ebenso

$$(-f)(z) = -(\alpha z) = (-\alpha)z$$

Damit können wir Drehstreckungen mit Zentrum 0 addieren und multiplizieren entsprechend den zugehörigen komplexen Zahlen und so mit den komplexen Zahlen identifizieren.

Die Drehstreckung

$$f(z) = \alpha z = r(\cos\phi + j\sin\phi)z$$

wird durch die Matrix

$$A = r\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

beschrieben, nämlich

$$\alpha 1 = \alpha, \quad \alpha j = r(-\sin\phi + j\cos\phi)$$

also

$$(*) \quad A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad \text{mit } a = r\cos\phi,\ b = r\sin\phi.$$

Umgekehrt ist jede Matrix dieser Form die Matrix einer Drehstreckung und wir können sie mit der komplexen Zahl $a + bj$ identifizieren. Wird $g(z) = \beta$ durch die Matrix B beschrieben so $(g \circ f)(z) = \beta\alpha z$ durch die Matrix BA, d.h. die komplexe Multiplikation kann als Matrixmultipliaktion bzw. verstanden werden. Die Addition entspricht der Matrizenaddition:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

Geht man von der Menge $\mathcal{M}$ aller Matrizen der Gestalt $(*)$ aus, so sieht man leicht, dass für $A, B \in \mathcal{M}$ auch

$$A + B \in \mathcal{M}, \quad -A \in \mathcal{M}, \quad O \in \mathcal{M}, AB \in \mathcal{M}, \quad E \in \mathcal{M}$$

und sogar $AB = BA$ und $A^{-1} \in \mathcal{M}$ für $A \neq O$. Da sich die weiteren Rechengesetze aus der Matrizenrechnung ergeben, folgt, dass $\mathcal{M}$ ein Körper ist - ein weiterer Zugang zu den komplexen Zahlen.

Will man hier rein geometrisch denken, so hat braucht man eine geometrische Charakterisierung der Drehsteckungen mit gegebenem Zentrum O: sie lassen O fest und erhalten Längen und Orientierung. Dass die Summe dann wieder eine ist, wird etwas mühsam.

11.6 Gebrochen lineare Abbildungen

Eine *gebrochen lienare Abbildung* von $\mathbb{C}$ in sich ist von der Form

$$f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad \gamma \neq 0 \text{ oder } \delta \neq 0$$

d.h. nur definiert für z mit $\gamma z + \delta \neq 0$. Die *Inversion am Einheitskreis* ist definiert durch

$$f(z) = \frac{1}{z} \quad \text{für } z \neq 0$$

Lemma 11.6 *Jede gebrochen lineare Abbildung $f(z) = (\alpha z + \beta)(\gamma z + \delta)^{-1}$ ist die Hintereinanderausführung $f_3 \circ f_2 \circ f_1$ von erst einer ganzlinearen Abbildung f_1, der Inversion f_2 am Einheitskreis, und einer ganzlinearen Abbildung f_3 falls $\gamma \neq 0$. Andernfalls f ganzlinear.*

Beweis.

$$z_1 = f_1(z) = \gamma z + \delta$$

$$z_2 = f_2(z_1) = \frac{1}{z_1}$$

$$z_3 = f_3(z_2) = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma} z_2 + \frac{\alpha}{\gamma} \quad \square$$

11.7 Inversion am Einheitskreis

Satz 11.7 *Bei der Inversion am Einheitskreis gehen ineinander über (und umgekehrt)*

- *Eine Gerade g durch 0 in eine ebensolche*
- *Eine Kreislinie K mit $0 \notin K$ in eine ebensolche*
- *Eine Gerade mit $0 \notin g$ in eine Kreislinie mit 0 in$K$*

Dabei wird 0 als Bild eines Punktes $\infty \notin \mathbb{C}$ aufgefasst, der auf allen Geraden liegend gedacht wird.

Beweis. Beachte, dass

$$\frac{1}{z} = \alpha \frac{1}{\alpha z} \quad \text{mit } \alpha \neq 0$$

Also darf man sich die abzubildende Gerade oder Kreislinie in eine günstige Position drehstrecken, dann invertieren und wieder "zurück"drehstrecken. Kurz, man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit schon annehmen, dass sie günstig liegt. Bei den Greaden durch 0 geht es auch ohne das: das Bild ist die an der reellen Achse gepiegelte Gerade.

Fall 2: Gerade g mit $0 \notin g$. O.B.d.A. ist g parallel zur imaginären Achse, also

$$g = \{a + jy \mid y \in \mathbb{R}\} \quad \text{mit } a > 0 \text{ in } \mathbb{R}$$

Sei

$$z = a + jy, \quad f(z) = x_1 + jx_2 \quad \text{mit } x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

Dann

$$a + jy = (x_1 + jx_2)^{-1} = (x_1 - jx_2)(x_1^2 + x_2^2)^{-1}$$

$$a = \mathsf{Re}(a + jy) = x_1(x_1^2 + x_2^2)^{-1}$$

$$ax_1^2 + ax_2^2 - x_1 = 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 - \frac{1}{a} x_1 = 0$$

Der Ansatz für einen Kreis durch $c \in \mathbb{R}$ ergibt

$$0 = (x_1 - c)^2 + x_2^2 - r^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2cx_1 + c^2 - r^2$$

und wird gelöst durch

$$c = \frac{1}{2a} = r$$

Fall 3: Kreis K mit $0 \notin K$. O.B.d.A.

$$K = \{z \mid |z - 1| = r\} = \{z \mid zz^* - z - z^* + 1 - r^2 = 0\}$$

Insbesondere $r \neq 1$. Für $w = \frac{1}{z}$ ergibt sich die zu $z \in K$ äquivalente Bedingung

$$\frac{1}{ww^*} - \frac{1}{w} - \frac{1}{w^*} + 1 - r^2 = 0$$

und durch weitere Äquivalenzumformung (Multiplikation mit $ww^* \neq 0$ und Umstellung)

$$(1 - r^2)ww^* - w - w^* + 1 = 0$$

$$ww^* - sw - sw^* + s = 0 \quad \text{Multiplikation mit } s = \frac{1}{1 - r^2} \neq 0$$

$$(w - s)(w^* - s) - s^2 + s = 0$$

$$|w - s|^2 = s^2 - s$$

Aber $s^2 > 0$ und aus $1 - r^2 < 1$ folgt dass $s = s^2(1 - r^2) < s^2$, also hat man den Bild-Kreis

$$\{f(z) \mid z \in K\} = \{w \mid |w - s|^2 = s^2 - s\} \quad \square$$

11.8 Komplexe Matrizen

Kap.11.2 und 11.3 gelten ebenso für jeden Körper K und K-Vektorraum V mit Basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, insbesondere für $K = \mathbb{C}$. Also werden $\mathbb{C}$-lineare Abbildungen von V, d.h.

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}), \quad f(\alpha\vec{x}) = \alpha f(\vec{x}) \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{C}$$

durch 2×2-Matrizen mit komplexen Einträgen beschrieben. f ist automatisch auch $\mathbb{R}$-linear - wemm man V als $\mathbb{R}$-Vektorraum auffasst, d.h. nur Skalare $\alpha \in \mathbb{R}$ betrachtet. Allerding ist V als $\mathbb{R}$-Vektorraum 4-dimensional mit Basis

$$\vec{e}_1,\ j\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ j\vec{e}_2$$

und man braucht eine reelle 4×4-Matrix um f zu beschreiben. Aus

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} + jb_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + jb_{21} & a_{22} + jb_{22} \end{pmatrix}$$

wird dann

$$\begin{pmatrix} a_{11} & -b_{11} & 0 & 0 \\ b_{11} & a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{21} & -b_{22} \\ 0 & 0 & b_{22} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Insbesondere ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung meist nicht $\mathbb{C}$-linear.

11.9 Zusammenfassung Kap. 10 und 11

K Körper, z.B. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

- Matrizenprodukt
  - $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2)$

    $BA = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix}$

    $= (B\boldsymbol{a}_1 \; B\boldsymbol{a}_2)$
- Determinante $\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$
- Inverse
  - $B = A^{-1} \Leftrightarrow AB = BA = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
  - A^{-1} existiert $\Leftrightarrow$
    $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ hat eindeutige Lösung $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$
  - $\det A \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$
- Ganzlineare Abbildungen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
  $f(z) = \alpha z + \beta$ $(\alpha \neq 0)$
  - Drehstreckungen und Verschiebungen
  - Geraden auf Geraden, Kreise auf Kreise
- Gebrochen lineare Abbildungen $f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$
  - $z \mapsto z_1 = \gamma z + \delta \mapsto z_2 \frac{1}{z_1} \mapsto \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma} z_2 + \frac{\alpha}{\gamma}$
  - Kreis oder Gerade auf Kreis oder Gerade
- Inversion $f(z) = \frac{1}{z}$
  - Gerade durch 0 $\leftrightarrow$ Gerade durch 0
  - Gerade nicht durch 0 $\leftrightarrow$ Kreis durch 0
    $\{a + jy \mid y \in \mathbb{R}\} \leftrightarrow \{z \mid |z - \frac{1}{2a}| = \frac{1}{2a}\}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$
  - Kreis nicht durch 0 $\leftrightarrow$ Kreis nicht durch 0
    $\{z \mid |z - 1|^2 = r^2\} \leftrightarrow \{w \mid |w - s|^2 = s^2 - s\}$, $s = \frac{1}{1 - r^2}$

  - Reduktion auf Spezialfälle mit: $\frac{1}{z} = \alpha \frac{1}{\alpha z}$
- Komplexe Kreisfunktionen $re^{j(\omega t + \phi)} = re^{j\phi}e^{j\omega t}$
  - $e^{j\phi} = \cos\phi + j \sin\phi$ nach Euler
  - Bahn: Kreis mit Radius r um 0
  - Phasenverschiebung ϕ
  - Frequenz ω
  - Bestimmt durch Zeiger $f(0) = re^{j\phi}$
  - $\alpha f + \beta g$ mit Zeiger $\alpha f(0) + \beta g(0)$
- umgekehrter Umlauf
  - $e^{-j\omega t} = \cos\omega t - j \sin\omega t$
  - $se^{-j(\omega t - \psi)} = se^{\psi}e^{-j\omega t}$
- $\mathbb{R}$-Linearkombinationen von $\cos\omega t$, $\sin\omega t$
  - $b\cos\omega t + c\sin\omega t = a\sin(\omega t + \phi)$
    $b = a\sin\phi$, $c = a\cos\phi$
  - $b\cos\omega t + c\sin\omega t = \mathsf{Re}((b - cj)e^{j\omega t})$
  - $\forall t\ (a + bj)\cos\omega t + (c + dj)\sin\omega t \in \mathbb{R}$
    $\Leftrightarrow b = d = 0$
- $\mathbb{C}$-Linearkombinationen von $\cos\omega t$, $\sin\omega t$
  - $(a + bj)e^{j\omega t} + (c + dj)e^{-j\omega t} =$
    $(a + c + (b + dj))\cos\omega t$
    $+(-b + d + (a - c)j))\sin\omega t$
  - $\cos\omega t = \mathsf{Re}\, e^{j\omega t} = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$
  - $\sin\omega t = \mathsf{Im}\, e^{j\omega t} = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$
  - $(a + bj)\cos\omega t + (c + dj)\sin\omega t$
    $= \frac{1}{2}(a + d + (b - c)j)e^{j\omega t}$
    $+\frac{1}{2}(a - d + (b + c)j)e^{-j\omega t}$
- $\mathbb{C}$-unabhängig: $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$
  $(\forall t\ \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t = 0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0$
- $\mathsf{Lin}_{\mathbb{C}}\{\cos\omega t, \sin\omega t\} = \mathsf{Lin}_{\mathbb{C}}\{e^{j\omega t}, e^{-j\omega t}\}$
  - Basen

    * $\cos \omega t, \sin \omega$
    * $e^{j\omega t}$, $e^{-j\omega t}$

- Ellipsen: $v, w \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$
  - $\{f(t) = a(\cos t)v + b(\sin \phi)w \mid t \in \mathbb{R}\}$
  - v, w Hauptachsen $\Leftrightarrow$ orthonormal
    * a, b Halbachsenlängen
- Achsenbestimmung für Ellipse $\{f(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$
  - $v = f(t_0)$ längere Hauptachse
    $\Leftrightarrow |f(t_0)| = \max\{|f(t)| \mid t \in \mathbb{R}\}$
  - $v = f(t_0)$ kürzere Hauptachse
    $\Leftrightarrow |f(t_0)| = \min\{|f(t)| \mid t \in \mathbb{R}\}$
- $f(t) = re^{j\phi}e^{j\omega t} + se^{j\psi}e^{-j\omega t}$
  - Ellipse oder Strecke
  - längere Hauptachse $f(t_0)$
    * $\omega t_0 = \frac{1}{2}(\psi - \phi) + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$
    * Halbachsenlänge $r + s$
  - kürzere Hauptachse $f(t_1)$
    * $\omega t_1 = \frac{1}{2}(\psi - \phi) + \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$
    * Halbachsenlänge $|r - s|$