Die vorliegende Formelsammlung enthält nur Formeln im engeren Sinne, deren Kenntnis in den nichtmathematischen Fächern stillschweigend vorausgesetzt wird. Diese Formeln sollten Sie also unmittelbar verfügbar haben und die Voraussetzungen kennen (die hier meist nicht angegeben sind). Nicht oder nur verkürzt aufgenommen sind Definitionen, Rechenregeln und Sätze für Zahlen, Vektoren und Funktionen. Diese sollten Sie natürlich sicher beherrschen.

1. $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
2. $a_n = q^n \Rightarrow s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \quad \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$
3. $\dim\{\mathbf{v} \mid A\mathbf{v} = \mathbf{0}\} = n - \mathsf{Rang}(A). \quad A \in K^{m\times n}$
4. In $\mathbb{R}$ ist $x \mapsto a + x$ streng monoton wachsend
5. In $\mathbb{R}$ ist $x \mapsto ax$ streng monoton wachsend für $a > 0$, fallend für $a < 0$
6. $|x - y| \geq ||x| - |y||$ und $|x + y| \geq ||x| - |y||$
7. Skalarprodukt, Vektorprodukt und Determinante sind linear in jedem Argument
8. $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle}, \quad \|r\vec{x}\| = |r|\|\vec{x}\|$
9. Das Skalarprodukt ist symmetrisch, d.h. kommutativ
10. Vektorprodukt und Determinante sind alternierend (Vertauschen zweier Argumente bedeutet Multiplikation mit -1) und scherungsinvariant
11. $\frac{\langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a}$ ist die Komponente von $\vec{b}$ in Richtung $\vec{a}$
12. $\|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ *Pythagoras*
13. $(\vec{b} - \vec{c}) \perp \vec{a}$ und $\|\vec{b} - \vec{c}\| = \min\{\|\vec{b} - \lambda\vec{a}\| \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ für $\vec{c} = \frac{\langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a}$ *Lot*
    $\|\vec{b} - \lambda\vec{a}\| = \|\vec{b} - \vec{c}\|$ genau dann, wenn $\lambda\vec{a} = \vec{c}$
14. $|\langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$ *Cauchy-Schwarz*
15. $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ *Dreiecksungleichung*
16. $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ bzgl. ON-Basis
17. $(\sin\phi)^2 + (\cos\phi)^2 = 1$
18. $\cos\phi = \cos\psi, \ \sin\phi = \sin\psi$ falls $\phi - 2z\pi = \psi$
19. $\cos -\phi = \cos\phi, \ \sin -\phi = -\sin\phi$
20. $\cos(\phi + \frac{1}{2}\pi) = -\sin\phi, \ \sin(\phi + \frac{\pi}{2}) = \cos\phi$
21. $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \ \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
22. $\tan\phi = \frac{\sin\phi}{\cos\phi}$ falls $\cos\phi \neq 0, \quad \cot\phi = \frac{\cos\phi}{\sin\phi}$ falls $\sin\phi \neq 0$

23. $\arg\vec{x} = \begin{cases} \arctan\frac{x_2}{x_1} & \text{falls } x_1 > 0 & \text{Hauptwert} \\ \pi + \arctan -\frac{x_2}{x_1} & \text{falls } x_1 < 0 & \text{Nebenwert} \\ \frac{\pi}{2} & \text{falls } x_1 = 0, x_2 > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{falls } x_1 = 0, x_2 < 0 \end{cases}$ für $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 \neq \vec{0}$
24. $\vec{a} \times \vec{b} \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$ bzgl. pos. orient. ON-Basis
25. $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \langle \vec{a} \times \vec{b} \mid \vec{c} \rangle = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$ bzgl.pos. orient. ON-Basis
26. $|zw| = |z||w|, \ \arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$ bis auf Vielfache von 2π
27. $z = a + bj, \ a, b \in \mathbb{R}, \ a = \mathsf{Re}(z), \ b = \mathsf{Im}(z)$
28. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \ \phi = \arg(a + bj) \Leftrightarrow a = \cos\phi$ und $b = \sin\phi \quad (\phi = \arctan b/a)$
29. $j^2 = (-j)^2 = -1, \ j^3 = 1/j = -j, \ j^4 = 1, \ 1/-j = j$
30. $\frac{1}{a+bj} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}j$
31. $z^* = a - bj, |z| = \sqrt{zz^*}, \ \mathsf{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + z^*), \ \mathsf{Im}(z) = \frac{1}{2j}(z - z^*)$
32. $(z + w)^* = z^* + w^*, \ (zw)^* = z^*w^*$
33. $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$ mit $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm z$ falls $z^2 = \frac{p^2}{4} - q$
34. $r(\cos\phi + j\sin\phi)s(\cos\psi + j\sin\psi) = rs(\cos(\phi + \psi) + j\sin(\phi + \psi))$
35. $\cos(\phi + \psi) = \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi, \quad \sin(\phi + \psi) = \sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\psi$
36. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
37. $e^{j\phi} = \exp(j\phi) = \cos\phi + j\sin\phi, \quad \mathsf{Re}(e^{j\phi}) = \cos\phi, \ \mathsf{Im}(e^{j\phi}) = \sin\phi$
38. $\cos\phi = \frac{1}{2}(e^{j\phi} + e^{-j\phi}), \ \sin\phi = \frac{1}{2j}(e^{j\phi} - e^{-j\phi})$
39. $|z|e^{j\phi} \cdot |w|e^{j\psi} = |z| \cdot |w| \cdot e^{j(\phi+\psi)}, \ (|z|e^{j\phi})^n = |z|^n e^{jn\phi}, \quad z^* = |z|e^{-j\phi}$ für $z = |z|e^{j\phi}$
40. $a\sin(\omega t + \phi) = a_1\sin(\omega t + \phi_1) + a_2\sin(\omega t + \phi_2) \Leftrightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2}, \ b = a\cos\phi = a_1\cos\phi_1 + a_2\cos\phi_2$ und $c = a\sin\phi = a_1\sin\phi_1 + a_2\sin\phi_2$
41. $f(t) = (a + bj)e^{j\omega t} = a\cos\omega t - b\sin\omega t + j(b\cos\omega t + a\sin\omega t) = f(0)e^{j\omega t}$
42. $a\cos\omega t + b\sin\omega t = \mathsf{Re}((a - bj)e^{j\omega t}) \ (t \in \mathbb{R})$ mit $a, b, \in \mathbb{R}$
43. $BA := C = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix} = (B(a_1 \ B(a_2)$ für $A = ((a_1 \quad (a_2)$
44. $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

45. Drehstreckung mit Zentrum ζ: $f(z) = \alpha(z - \zeta) + \zeta = \alpha z + \zeta(1 - \alpha)$

46. Spiegelung an Gerade durch 0 mit Steigungswinkel ϕ: $f(z) = \alpha(\alpha^{-1}z)^* = \alpha^2 z^*$ mit $\alpha = \cos\phi + j\sin\phi$

47. Spiegelung an Gerade durch ζ mit Steigungswinkel ϕ: $f(z) = \alpha^2(z^* - \zeta^*) + \zeta$

48. $\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} = z_3$ mit $z_1 = \gamma z + \delta,\ z_2 = \frac{1}{z_1},\ z_3 = \frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma} z_2 + \frac{\alpha}{\gamma}$

49. $\{\frac{1}{a+jy} \mid y \in \mathbb{R}\} = \{x_1 + jx_2 \mid (x_1 - \frac{1}{2a})^2 + x_2^2 = \frac{1}{4a^2}\}\ \ a > 0$

50. $\{\frac{1}{z} \mid |z-1| = r\} = \{w \mid |w - s|^2 = s^2 - s\}$ mit $s = \frac{1}{1-r^2}$

51. $\frac{\partial Cy}{\partial x} = C\frac{\partial y}{\partial x},\ \frac{\partial(y+z)}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial(yz)}{\partial x} = y\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x}z,\ \frac{\partial \frac{1}{x}}{\partial x} - \frac{1}{x^2}$

52. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x},\ \ (g \circ f)'(p) = g'(f(p)) \cdot f'(p),\quad \frac{\partial \frac{1}{y}}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial x},\quad \frac{\partial \frac{z}{y}}{\partial x} = \frac{1}{y^2}\cdot(y\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial y}{\partial x})$

53. $g'(q) = \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{\frac{\partial y}{\partial x}} = \frac{1}{f'(p)} = \frac{1}{f'(g(q))}$ für $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$.

54. Für komplexwertige Funktionen bzw. für vektorwertige Funktionen gelten die Ableitungsregeln analog (bzgl. Skalar- und Vektorprodukt)

55. $\frac{\partial \sin x}{\partial x} = \cos x,\ \ \frac{\partial \cos x}{\partial x} - \sin x,\ \ \frac{\partial \tan x}{\partial x} = \frac{1}{(\cos x)^2},\ \ \frac{\partial \cot x}{\partial x} = \frac{-1}{(\sin x)^2}$

56. $\frac{\partial \arcsin y}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\ \frac{\partial \arccos y}{\partial y} = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}},\ \frac{\partial \arctan y}{\partial y} = \frac{1}{1+y^2},\ \frac{\partial \mathrm{arccot} y}{\partial y} = \frac{1}{1+y^2}$

57. $\frac{\partial \ln y}{\partial y} = \frac{1}{y}\ (y > 0),\ \ \ln 1 = 0,\ \ \ln(yv) = \ln y + \ln v,\ \ \ln\frac{1}{y} = -\ln y$

58. $\frac{\partial e^x}{\partial x} = e^x,\ \ e^0 = 1,\ e^{x+u} = e^x \cdot e^u,\ y = e^x \ \Leftrightarrow\ x = \ln y,\ \ y > 0$

59. $c = b^a = e^{a\ln b} \ \Leftrightarrow\ a = \log_b c$ für $b, c > 0,\ (xu)^a = x^a u^a$

60. $b^0 = 1,\ \ b^{x+u} = b^x b^u,\ \ b^{-x} = \frac{1}{b^x},\ b^{xu} = (b^x)^u,\ \ b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b}^m$

61. $\frac{\partial x^a}{\partial x} = ax^{a-1}\ (a \neq -1),\ \ \frac{\partial\sqrt{x}}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ \ \frac{\partial b^x}{\partial x} = b^x \ln b$

62. $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{\partial \cosh x}{\partial x},\quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{\partial \sinh x}{\partial x}$

63. $\sinh(x+y) = \sinh x \cos hx + \cosh x \sinh y$

64. $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,\ \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

65. $y = \sinh x \Leftrightarrow \mathrm{Arsinh}\, y = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$ auf $\mathbb{R}$, $\frac{\partial \mathrm{Arsinh}\, y}{\partial y} = \frac{1}{\cosh x} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$

66. $y = \cosh x \Leftrightarrow \mathrm{arcosh}\, y = \ln(y + \sqrt{y^2-1}$ auf $[1, \infty[$, $\frac{\partial \mathrm{Arcosh}\, y}{\partial y} = \frac{1}{\sinh x} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$

67. $(\Delta y)(p, \Delta t) = f(p + \Delta t) - f(p)$ für $y = f(t)$

68. $f(p + \Delta t) = f(p) + \Delta\vec{y} = f(p) + \frac{\partial y}{\partial t}\Delta t + R(\Delta t)$

69. $|\Delta y(p)| \lessapprox |f'(p)|\delta,\ \ |\frac{\Delta y}{y}|(p) = \frac{|\Delta y(p)|}{|fp|} \lessapprox \frac{|f'(p)|}{|f(p)|}\delta$ für $|\Delta x| \leq \delta$

70. $T_n(x, x_0) := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k,\ \ R_n(b, a) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$
$f(b) = T_n(b, a) + R_n(b, a)$

71. $f \mapsto \int_a^b f\,\mathrm{d}x$ ist linear und monoton, $|\int_a^b f| \leq \int_a^n |f|$ (f stetig)

72. $\int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^\gamma f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx,\ \ \int_\alpha^\alpha f(x)dx = 0$

73. Komplex- oder vektorwertige Funktionen werden komponentenweise integriert

74. $$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad \text{auf} \quad \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls} \quad \alpha = 0, 1, 2, \ldots \\ \mathbb{R}\backslash\{0\} & \text{falls} \quad \alpha = -2, -3, -4, \ldots \\ (0, \infty) & \text{falls} \quad \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}, \end{cases}$$

75. $$\int x^{-1}dx = \ln|x| + C \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}\backslash\{0\},, \qquad \int e^x dx = e^x + C \quad \text{auf} \quad \mathbb{R},$$

76. $$\int \sin x\, dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x\, dx = \sin x + C \quad \text{auf} \quad \mathbb{R},$$

77. $$\int \sinh x\, dx = \cosh x + C, \qquad \int \cosh x\, dx = \sinh x + C \quad \text{auf} \quad \mathbb{R},$$

78. $$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C \quad \text{auf } \mathbb{R}, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C \quad \text{auf } (-1, 1).$$

79. $$\int \frac{dx}{(x-b)^k} = \begin{cases} \frac{1}{1-k}(x-b)^{1-k} & \text{falls } k > 1 \\ \ln|x-b| & \text{falls } k = 1\,, \end{cases}$$

80. $\int \frac{dx}{x^2+2cx+d} = \frac{1}{\sqrt{d-c^2}} \arctan \frac{x+c}{\sqrt{d-c^2}}$

81. $\int \frac{\alpha x+\beta}{x^2+2cx+d} dx = \frac{\alpha}{2}\ln(x^2 + 2cx + d) + (\beta - \alpha c) \int \frac{dx}{x^2+2cx+d}$

82. $f(x(p))\mathrm{d}x(p) = cg(y(p))\mathrm{d}y(p) + h(z(p))\mathrm{d}z(p)$ für alle $p \in [a, b] \Rightarrow$
$\int f(x)\mathrm{d}x = c\int g(y)\mathrm{d}y + \int h(z)\mathrm{d}z\ + C,\ \ \int_{x(a)}^{x(b)} f(x)\mathrm{d}x = c\int_{y(a)}^{y(b)} g(y)\mathrm{d}y + \int_{z(a)}^{z(b)} h(z)\mathrm{d}z$

83. Partielle Integration vermöge $\mathrm{d}w = \mathrm{d}uv = v\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t + u\frac{\partial v}{\partial t}\mathrm{d}t = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v$

84. Substitution $\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(x(t))\frac{\partial x}{\partial t}\mathrm{d}t + C,\quad \int_{x(a)}^{x(b)} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x(t))\frac{\partial x}{\partial t}\mathrm{d}t$

85. Substitution rückwärts: $\int f(x)\mathrm{d}x = \Phi(u(x)) + C$ und $\int_c^d f(x)\mathrm{d}x = \Phi(u(d)) - \Phi(u(c))$ falls $x = x(u) \Leftrightarrow u = u(x)$ und $\Phi(u) = \int f(x(u))\frac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u + C$

86. $g(x) = q(x)(x-a)^k,\ \ q(a) \neq 0,\ A = \frac{f(a)}{q(a)}$ und $f(x) - Aq(x) = h(x)(x - a)$
$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{h(x)}{q(x)(x-a)^{k-1}}$

87. $$\int_1^\infty x^\alpha dx = \lim_{t\to\infty} \begin{cases} \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} & \alpha \neq -1 \\ \ln t & \alpha = -1 \end{cases} = \begin{cases} \infty & \alpha \geq -1 \\ -\frac{1}{\alpha+1} & \alpha < -1 \end{cases}$$

88. $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$

89. $$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{s\searrow 0} \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} - \frac{s^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{falls } \alpha \neq 1 \\ -\ln s & \text{falls } \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \infty & \text{falls } \alpha \geq 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{falls } \alpha < 1. \end{cases}$$