9. Übung Mathematik I für ET

(G 34) a) Gegeben sei eine positiv orientierte Orthonormalbasis $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ der Ebene und die Vektoren

$$\vec{a} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2, \quad \vec{b} = 5\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$$

Bestimmen Sie das Skalarprodukt $\langle \vec{a} \,|\, \vec{b} \rangle$, die Determinante $\det(\vec{a}, \vec{b})$, Sinus und Cosinus des Winkels $\phi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$, den Flächeninhalt F des Dreiecks mit Ecken $O, \vec{a}+O, \vec{b}+O$ und den Abstand d des Punktes $\vec{b}+0$ von der Geraden mit Parameterdarstellung $r\vec{a}+O$.

b) Gegeben sei eine positiv orientierte Orthonormalbasis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ des Raumes und die Vektoren

$$\vec{a} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \quad \vec{b} = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 1\vec{e}_3, \quad \vec{c} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$$

Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $\vec{a} \times \vec{b}$ und die Determiante $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

c) Begründen Sie, dass $\vec{d} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ stets eine Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist und geben Sie diese für die Vektoren aus b) an.

Lösung a)

$$\langle \vec{a} \,|\, \vec{b} \rangle = 5 + 4 = 9, \quad \det(\vec{a}, \vec{b}) = 2 - 10 = -8, \quad \cos\phi = 9, \ \sin\phi = -8$$

$$F = |-8|/2 = 4, \quad d = |-8|/\|\vec{a}\| = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

b)

$$\vec{a} \times \vec{b} = -3\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \quad \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -3$$

c) Sind $\vec{a}, \vec{b}$ linear abhängig, so $\vec{d} = \vec{0}$. Andernfalls ist $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ Normalenvektor der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene durch den Ursprung und $\vec{d}$ steht auf $\vec{n}$ senkrecht, liegt also in der Ebene. Die Linearkomnination erhält man nach Grassmann als

$$\vec{d} = \langle \vec{a} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{a} = 7\vec{b} - 10\vec{a}$$

(G 35) a) Seien $\vec{a}, \vec{x}$ Vektoren des Raumes und $\|\vec{a}\| = 1$. Zeigen Sie für jeden Punkt O, dass $\|\vec{a} \times \vec{x}\|$ der Abstand des Punktes $\vec{x}+O$ von der Geraden mit Paramaterdarstellung $r\vec{a}+O$ ist.

b) Seien $\vec{a}, \vec{b}$ zueinander orthogonale Vektoren des Raumes, $\vec{a} \neq \vec{0}$ und O ein Punkt.

(i) Zeigen Sie: $\|\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})\| = \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|$

(ii) Zeigen Sie, dass $\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \lambda\vec{b}$ für ein $\lambda < 0$

(iii) Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{p}$ mit $\vec{a} \times \vec{p} = \vec{b}$.

(iv) Zeigen Sie, dass die Punktmenge $g = \{\vec{x} + O \mid \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}\}$ eine Gerade mit Richtungsvektor $\vec{a}$ ist

Lösung. a) $\|\vec{a} \times \vec{x}\|$ ist die Fläche des von $O, \vec{a} + O$ und $\vec{x} + O$ aufgespannten Parallelogramms. Die Grundseite hat Länge $\|\vec{a}\| = 1$, also ist $\|\vec{a} \times \vec{x}\|$ auch die Höhe, d.h. der gesuchte Abstand.

b) (i) Wegen Orthogonalität gilt

$$\|\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$$

(ii) $\vec{b}$ und $\vec{c} = \vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})$ stehen beide senkrecht auf den unabhängigen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$, also $\vec{c} = \lambda \vec{b}$. Das Tripel $\vec{a}$, $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b}$ ist negativ orientiert, $\vec{a}, , \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}$ positiv, also $\lambda < 0$.

(iii) Nach (i) und (ii):

$$\vec{p} = -\frac{1}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a} \times \vec{b}$$

(iv) Sei $\vec{p} + O \in g$ - nach (iii) gibts das. Dann $\vec{a} \times (r\vec{a} + \vec{p}) = \vec{a} \times r\vec{a} + \vec{a} \times \vec{p} = \vec{0} + \vec{b} = \vec{b}$, also $r\vec{a} + \vec{p} + O \in g$. Ist umgekehrt $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$, dann $\vec{a} \times (\vec{x} - \vec{p}) = \vec{a} \times \vec{x} - \vec{a} \times \vec{p} = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$, also $\vec{x} - \vec{p} = r\vec{a}$ und $\vec{x} = r\vec{a} + \vec{p}$.

(G 36) Ein Tetraeder im Raum ist durch 4 Punkte gegeben, die nicht in einer Ebene liegen. Je drei bestimmen ein Dreieck F_i, eine Fläche des Tetreders, $(i = 0, 1, 2, 3)$. Für jedes F_i sei $\vec{n}_i$ der Vektor senkrecht auf F_i, dessen Länge die Dreiecksfläche $|F_i|$ ist und der nach außen zeigt. Zeigen Sie, dass gilt

$$\vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \vec{n}_3 + \vec{n}_4 = \vec{0}$$

Hinweis: Wählen Sie eine Ecke des Tetraeders als Ursprung O und die anderen als $\vec{x}_i + O$ mit $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2$ positiv orientiert. Fertigen Sie eine Skizze an!

Lösung: Für die Fläche F_i mit Ecken O, $\vec{x}_i + O$, and $\vec{x}_{i+1} + O$ (Indizes modulo 3) hat man

$$\vec{v}_{F_i} = -\vec{x}_i \times \vec{x}_{i+1}$$

Für F_0 mitEcken $\vec{x}_1 + O$, $\vec{x}_2 + O$ and $\vec{x}_3 + O$

$$\vec{v}_{F_0} = (\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \times (\vec{x}_3 - \vec{x}_1)$$

In der Summe

$$-\vec{x}_1 \times \vec{x}_2 - \vec{x}_2 \times \vec{x}_3 - \vec{x}_3 \times \vec{x}_1 + (\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \times (\vec{x}_3 - \vec{x}_1)$$

$$= -\vec{x}_1 \times \vec{x}_2 - \vec{x}_2 \times \vec{x}_3 - \vec{x}_3 \times \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \times \vec{x}_3 + \vec{x}_2 \times (-\vec{x}_1) + -\vec{x}_1 \times \vec{x}_3 - \vec{x}_1 \times (-\vec{x}_1)$$
$$= -\vec{x}_1 \times \vec{x}_2 - \vec{x}_2 \times \vec{x}_3 - \vec{x}_3 \times \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \times \vec{x}_3 + \vec{x}_1 \times \vec{x}_2 + \vec{x}_3 \times \vec{x}_1 + \vec{0} = \vec{0}$$