Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
Dipl.-Math. Tobias Hansel
Dipl.-Math. Rene Hartmann
Dipl.-Math. Michael Klotz

Technische Universität Darmstadt

SS 2009
12.06.2009

9. Übungsblatt zur „Mathematik II für ET, WI(ET), SpoInf, IkT, IST, CE, Mechatronik"

Gruppenübung

Aufgabe G30 (Konvergenz von Funktionenfolgen und -reihen)
Sei (f_n) eine Funktionenfolge von reellen Funktionen $f_n\colon \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ und sei f eine weitere reelle Funktion auf D. Kreuzen Sie alle allgemeingültigen Aussagen an.

- ☒ Wenn (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert, dann konvergiert (f_n) punktweise gegen f.
- ☐ Wenn (f_n) punktweise gegen f konvergiert, dann konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f.
- ☒ Wenn (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert, dann ist $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_\infty = 0$.
- ☒ Wenn $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_\infty = 0$ gilt, dann konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f.
- ☒ Wenn die Zahlenreihe $\sum_{n=1}^\infty ||f_n||_\infty$ konvergiert, dann kovergiert die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^\infty f_n$ punktweise.
- ☒ Wenn die Zahlenreihe $\sum_{n=1}^\infty ||f_n||_\infty$ konvergiert, dann kovergiert die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^\infty f_n$ gleichmäßig.
- ☐ Wenn die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^\infty f_n$ punktweise konvergiert, dann konvergiert die Zahlenreihe $\sum_{n=1}^\infty ||f_n||_\infty$.
- ☐ Wenn die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^\infty f_n$ gleichmäßig konvergiert, dann konvergiert die Zahlenreihe $\sum_{n=1}^\infty ||f_n||_\infty$.

Fourierreihen: Für eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Periode $T > 0$ lautet die zugehörige Fourierreihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(\frac{2\pi}{T}nx) + b_n \sin(\frac{2\pi}{T}nx))$$

mit den Koeffizienten

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(\frac{2\pi}{T}nx)\,dx,\ n \in \mathbb{N}_0,$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(\frac{2\pi}{T}nx)\,dx,\ n \in \mathbb{N}.$$

Falls die Funktion gerade ist, d. h. $f(x) = f(-x)$ für $x \in \mathbb{R}$, dann ist

$$a_n = 2 \cdot \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos(\frac{2\pi}{T} nx)\, dx$$

und $b_n = 0$. Falls die Funktion ungerade ist, d. h. $f(x) = -f(-x)$ für $x \in \mathbb{R}$, dann ist

$$b_n = 2 \cdot \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin(\frac{2\pi}{T} nx)\, dx$$

und $a_n = 0$.

Ist die Funktion f stückweise stetig differenzierbar, so konvergiert die Fourierreihe für jedes x. An allen Stetigkeitsstellen x von f stimmt der Grenzwert mit $f(x)$ überein. An allen Sprungstellen x konvergiert die Reihe gegen $\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}$.

Aufgabe G31 (Fourierreihen)

(a) Bestimmen Sie die Fourierreihen der 2π-periodischen Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |\sin x|$$

und

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \pi - e^2 \frac{\cos(3x)}{2}.$$

Konvergieren die Fourierreihen? Stimmen sie mit der jeweiligen Funktion überein?

(b) Sei $a \in \mathbb{R}$ und gelte $0 < a < 1$. Bezeichne f_a die 1-periodische Funktion, für die gilt

$$f_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{falls } a < x < 1 \end{cases}$$

Skizzieren Sie die Funktion f_a für $a = 0.25$ auf dem Intervall $[-1, 2]$. Bestimmen Sie dann die Fourierreihe von f_a (für allgemeines a). Konvergiert die Reihe? Bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzfunktion und überprüfen Sie, ob diese mit f_a übereinstimmt.

Tipp: Es gilt

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)).$$

Lösung:

(a) Da f eine gerade Funktion ist, gilt $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}(\sin(x-nx)+\sin(x+nx))\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x(1-n))+\sin(x(1+n))\,dx \\
&\overset{\text{für } n\neq 1}{=} \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(x(1-n))}{1-n}+\frac{-\cos(x(1+n))}{1+n}\right]_0^\pi \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-(-1)^{(1-n)}}{1-n}+\frac{-(-1)^{1+n}}{1+n}-\frac{-1}{1-n}-\frac{-1}{1+n}\right) \quad \text{wobei } \cos(k\pi) = (-1)^k \text{ für } k\in\mathbb{Z} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{1-n}+\frac{(-1)^n}{1+n}-\frac{-1}{1-n}-\frac{-1}{1+n}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left((-1)^n\frac{2}{1-n^2}+\frac{2}{1-n^2}\right) \\
&= \begin{cases} \frac{4}{\pi(1-n^2)} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}
\end{aligned}$$

für $n \neq 1$. Für den Koeffizienten a_1 gilt

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x(1-1))+\sin(x(1+1))\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(2x)\,dx = 0.$$

Daher lautet die Fourierreihe von f

$$\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{1-(2n)^2}.$$

Da f stetig und stückweise stetig differenzierbar ist, konvergiert die Fourierreihe und stimmt mit f überein.
Die Funktion g ist bereits selbst eine (abbrechende/endliche) Fourierreihe, sodass die Koeffizienten (ohne Rechnung) abgelesen werden können. Die Summe der Fourierreihe von g stimmt also mit g überein. Die Koeffizienten sind alle Null außer $a_0 = 2\pi$ und $a_3 = \frac{-e^2}{2}$.

(b) Für die Koeffizienten der Fourierreihe gilt

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{1}\int_0^1 f_a(x)\cos(0)\,dx = 2\int_0^a 1\,dx = 2a, \\
a_n &= \frac{2}{1}\int_0^1 f_a(x)\cos(2\pi nx)\,dx = 2\int_0^a \cos(2\pi nx)\,dx = 2\left[\frac{\sin(2\pi nx)}{2\pi n}\right]_0^a \\
&= \frac{\sin(2\pi na)}{\pi n}, \\
b_n &= \frac{2}{1}\int_0^1 f_a(x)\sin(2\pi nx)\,dx = 2\int_0^a \sin(2\pi nx)\,dx = 2\left[-\frac{\cos(2\pi nx)}{2\pi n}\right]_0^a \\
&= \frac{1-\cos(2\pi na)}{\pi n}.
\end{aligned}$$

Daher lautet die Fourierreihe von f_a

$$a+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2\pi na)}{\pi n}\cos(2\pi nx)+\frac{1-\cos(2\pi na)}{\pi n}\sin(2\pi nx).$$

Da die Funktion f_a stückweise stetig differenzierbar ist, konvergiert ihre Fourierreihe. An allen Stetigkeitsstellen von f_a stimmt die Grenzfunktion mit f_a überein. An allen Sprungstellen x konvergiert sie gegen $\frac{f_a(x_+)+f_a(x_-)}{2}$. Die Sprungstellen sind durch alle $x = 0+k$ und $x = a+k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ gegeben. An jeder dieser Stellen x ist

$$\frac{f_a(x_+) + f_a(x_-)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Die Fourierreihe von f_a konvergiert also gegen die 1-periodische Funktion $\tilde{f}_a$, für die

$$\tilde{f}_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{falls } x = 0 \text{ oder } x = a \\ 1 & \text{falls } 0 < x < a \\ 0 & \text{falls } a < x < 1 \end{cases}$$

gilt.

Daher unterscheiden sich an den Stellen $x = 0 + k$ und $x = a + k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ die Fourierreihe und die Funktion f_a.

Aufgabe G32 (Quotienten von Potenzreihen)

Entwickeln Sie die Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x) := \frac{x}{x^4 + 1}$$

in eine Potenzreihe mit dem Entwicklungspunkt 0 und bestimmen Sie deren Konvergenzradius.

Tipp: Fassen Sie x und x^4+1 als Potenzreihen auf und benutzen Sie Satz 25.17 über den Quotienten von Potenzreihen.

Lösung: Die Funktion $f(x) = x$ läßt sich als Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit den Koeffizienten $a_1 = 1$ und $a_n = 0$ für $n \neq 1$ auffassen und $g(x) = x^4 + 1$ als Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ mit den Koeffizienten $b_0 = 1$, $b_1 = 0$, $b_2 = 0$, $b_3 = 0$, $b_4 = 1$ und $b_n = 0$ für $n > 4$.

Da $b_0 \neq 0$ ist, läßt sich nach Satz 25.17 $\frac{f}{g}$ in eine Potenzreihe um 0 mit positiven Konvergenzradius entwickeln. Bezeichnen c_n die Koeffizienten dieser Reihe, dann gilt

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

bzw.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right).$$

Aufgrund des Koeffizientenvergleichs und des Cauchyprodukts ist

$$a_n = b_n c_0 + \ldots + b_0 c_n.$$

Da $b_0 = 1$ gilt, folgt

$$c_n = a_n - b_n c_0 - \ldots - b_1 c_{n-1}.$$

Daher gilt für $n = 0$

$$c_0 = a_0 = 0,$$

für $n = 1$

$$c_1 = a_1 - b_1 c_0 = 1,$$

für $n = 2$

$$c_2 = a_2 - b_2 c_0 - b_1 c_1 = 0,$$

für $n = 3$

$$c_3 = a_3 - b_3c_0 - b_2c_1 - b_1c_2 = 0$$

und für $n > 3$

$$c_n = -b_4c_{n-4} = -c_{n-4}.$$

Wegen $c_1 = 1$ gilt also $c_5 = -1$, $c_9 = 1$, $c_{13} = -1$, $c_{17} = 1$ usw., alle anderen Koeffizienten sind 0. Das heißt also:

$$c_n = \begin{cases} (-1)^k & \text{falls } n = 4k+1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daraus folgt, daß sich $\frac{x}{x^4+1}$ durch die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n+1}$$

darstellen läßt.

Obwohl die Potenzreihen von f und g beide auf ganz $\mathbb{R}$ konvergieren, ist der Konvergenzradius der Potenzreihe von $\frac{f}{g}$ nur 1, wie wir wie folgt sehen: Es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} c_n = 1,$$

sodass der Konvergenzradius nach dem Wurzelkriterium (Satz 25.10) durch $(\limsup_{n\to\infty} c_n)^{-1} = 1$ gegeben ist.

(Alternativ: Die Reihe lässt sich umschreiben zu einer geometrischen Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x^4)^n = x \sum_{n=0}^{\infty} (-x^4)^n,$$

die für $|-x^4| < 1$, also für $|x| < 1$ konvergiert.)

Abgabe der Hausübungen: Am Freitag den 19. Juni 2009 vor der Übung.

(Korrekturen zu diesem Übungsblatt bitte an Michael Klotz, kl...@math...tik.tu-darmstadt.de)