Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
Tobias Hansel
René Hartmann
Michael Klotz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 09 5.6.2009

Mathematik II für ET, WI(ET), SpoInf, IST, BEd.ET, CE

8. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 26) (Punkweise und gleichmäßige Konvergenz)

Untersuche die folgenden Funktionenfolgen bzw. -reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

(a) $f_n = \sqrt[n]{n^2x^3}, \quad x \in [0,5];$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3+x^3}, \quad x \in [0,1];$ (c) $g_n = \sin\frac{x}{n}, \quad x \in \mathbb{R}.$

Lösung: (a) Für $x \in (0,5]$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2x^3} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^2 \cdot \sqrt[n]{x}^3 = (\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n})^2 \cdot (\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x})^3 = 1 \cdot 1 = 1$$

Für $x = 0$ ist

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 \cdot x^3} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{0} = 0$$

Also ist (f_n) punktweise konvergent auf [0,5] mit der Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ 1 & x \in (0,5] \end{cases}.$$

Da f nicht stetig ist, aber f_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ stetig auf [0,5] ist, kann (f_n) auf [0,5] nicht gleichmäßig konvergieren.

(b) Für alle $x \in [0,1]$ gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{nx^2}{n^3+x^3}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3+x^3} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, konvergiert die Funktionenreihe gleichmäßig auf [0,1] nach Satz 25.2. Damit konvergiert sie insbesondere auch punktweise.

(c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$ und da die Sinus-Funktion stetig ist, folgt

$$\lim_{n\to\infty} \sin(\frac{x}{n}) = \sin(0) = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also konvergiert (g_n) punktweise gegen die Nullfunktion. Die Konvergenz ist aber nicht gleichmäßig, denn:
Setzen wir $x_n = \frac{n\pi}{2}$, dann gilt $g_n(x_n) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ for all $n \in \mathbb{N}$. Also folgt

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n(x) - g(x)\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \|g_n(x)\|_\infty \geq \lim_{n\to\infty} 1 = 1 > 0$$

Damit kann $(g_n)_n$ nicht gleichmäßig konvergieren.

(G 27) (Potenzreihen)

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der nachfolgenden Potenzreihen:

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^7x^n}{2n!}, \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n} \qquad \text{und} \qquad \text{(iii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4nx)^n}{2n^3}.$$

Wie sieht bei der zweiten Reihe das Konvergenzverhalten auf dem Rand des Konvergenzintervalls aus? Geben Sie alle $x \in \mathbb{R}$ an, für die die Potenzreihen konvergieren.

LÖSUNG: (i) Seien a_n die Koeffizienten der ersten Potenzreihe. Dann gilt

$$a_n = \frac{3n^7}{2n!}.$$

Für den Konvergenzradius R gilt

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{3n^7}{2n!}}{\frac{3(n+1)^7}{2(n+1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty} (n+1)\frac{n^7}{(n+1)^7} = \infty.$$

Folglich konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^7x^n}{2n!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Seien b_n die Koeffizienten der zweiten Potenzreihe. Dann gilt

$$b_n = \frac{1}{n}.$$

Für den Konvergenzradius R gilt

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Am linken Rand des Konvergenzintervalls ($x = 0$) lautet die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Dies ist die alternierende harmonische Reihe, die bekanntlich konvergent ist. Am rechten Rand des Konvergenzintervalls ($x = 2$) lautet die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Dies ist die harmonische Reihe, die bekanntlich divergent ist. Daraus folgt, daß die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$ für alle $x \in [0, 2)$ konvergiert.

(iii) Seien c_n die Koeffizienten der dritten Potenzreihe. Dann gilt

$$c_n = \frac{(-4n)^n}{2n^3}.$$

Für den Konvergenzradius R gilt

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{(-4n)^n}{2n^3}\right|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2n^3}}{\sqrt[n]{(4n)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\sqrt[n]{2n^3}}^{\to 1}}{4n} = 0$$

Folglich konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4nx)^n}{2n^3}$ nur für $x = 0$.

(G 28) (Funktionenfolgen und Integration)

Sei

$$f_n : (0,1) \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} n & x < \frac{1}{n} \\ 0 & x \geq \frac{1}{n} \end{cases}.$$

(a) Gegen welche Funktion konvergiert die Funktionenfolge f_n punktweise?

(b) Konvergiert die Funktionenfolge f_n gleichmäßig?

(c) Berechnen Sie

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$$

und vergleichen Sie die Werte. Geben Sie auch eine Begründung an.

(d) Sei $a \in (0,1)$. Berechnen Sie

$$\int_a^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \int_a^1 f_n(x)dx$$

und vergleichen Sie die Werte. Geben Sie auch eine Begründung an.

LÖSUNG: (a) Sei $x \in (0,1)$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ größer als $\frac{1}{x}$ gilt

$$f_n(x) = 0.$$

Daraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in (0,1).$$

Folglich konvergiert die Funktionenfolge f_n punktweise gegen die Funktion

$$f : (0,1) \to \mathbb{R} : x \mapsto 0.$$

(b) Die Funktionenfolge f_n konvergiert gleichmäßig gegen f, wenn

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_\infty = 0$$

gilt.

Da $f = 0$ ist, gilt

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_\infty = \lim_{n\to\infty} ||f_n||_\infty = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(0,1)} |f_n(x)| = \lim_{n\to\infty} n = \infty \neq 0$$

Daher konvergiert f_n *nicht gleichmäßig*.

(c) Aus $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ folgt

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 0dx = 0.$$

Für den zweiten Ausdruck gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx &= \lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} f_n(x)dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} ndx + \int_{\frac{1}{n}}^1 0dx \\ &= \lim_{n\to\infty} 1 = 1. \end{aligned}$$

Offensichtlich darf in diesem Fall Integration und Limesbildung nicht vertauscht werden. Der Satz aus dem Skript darf nicht angewendet werden, da die Funktionenfolge $(f_n)_n$ nicht gleichmäßig konvergiert.

(d) Aus $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ folgt
$$\int_a^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_a^1 0dx = 0.$$
Ist $a \geq \frac{1}{n}$, dann ist f_n auf dem Intervall $(a, 1)$ Null und daher $\int_a^1 f_n(x)dx = 0$. Da das $a > 0$ (und fest gewählt) und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ist, tritt dieser Fall für alle hinreichend großen n ein. Daher ist
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^1 f_n(x)dx = 0.$$
Daß die Werte in diesem Fall übereinstimmen, läßt sich dadurch erklären, daß die Funktionenfolge f_n eingeschränkt auf das Intervall $(a, 1)$ gleichmäßig gegen Null konvergiert.

(G 29) (Funktionenfolgen und Differentation)

Sei
$$f_n : [0, 1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^n}{n}.$$

1. Gegen welche Funktion konvergiert die Funktionenfolge f_n punktweise?
2. Konvergiert die Funktionenfolge f_n gleichmäßig?
3. Berechnen Sie
$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} f_n'$$
und vergleichen Sie die Ergebnisse. An welchen Stellen treten Unterschiede auf und wie sind diese zu erklären?

LÖSUNG: (a) Es gilt
$$0 \leq f_n(x) = \frac{x^n}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \text{für alle } x \in [0, 1].$$
Daraus folgt
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$
Folglich konvergiert die Funktionenfolge f_n punktweise gegen die Funktion
$$f : (0, 1) \to \mathbb{R} : x \mapsto 0.$$

(b) Es gilt $||f_n||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{x^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$. Daher ist
$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_\infty = \lim_{n\to\infty} ||f_n||_\infty = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$
woraus folgt, daß f_n *gleichmäßig* konvergiert.

(c) Da $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ ist, gilt auch
$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = 0.$$
Allerdings ist $f_n'(x) = x^{n-1}$ und daher
$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 1 \\ 1 & \text{falls } x = 1 \end{cases}.$$
Obwohl die Funktionenfolge f_n gleichmäßig konvergiert, können Differentation und Limesbildung nicht vertauscht werden, da in diesem Fall die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge f_n' nicht gegeben ist.