



Mathematik II für ET, WI(ET), SpInf, IST, BEEd.ET, CE

7. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 22) (Basiswechsel)

Gegeben sei ein 2-dimensionaler reeller Vektorraum mit einer orthonormalen Basis α . Bezüglich dieser Basis α ist eine Basis $\beta : \vec{b}_1, \vec{b}_2$ durch $\vec{b}_1^\alpha = (1, 0)^\top$ und $\vec{b}_2^\alpha = (1, 1)^\top$ gegeben.

- Zeichnen Sie die Vektoren \vec{b}_1 und \vec{b}_2 in ein Koordinatensystem bezüglich der Basis α ein. Zeichnen Sie in dieses Koordinatensystem auch den Vektor \vec{x} ein, der bezüglich der Basis β durch $\vec{x}^\beta = (2, 3)^\top$ gegeben ist.
- Bestimmen Sie die Transformationsmatrix ${}^\alpha T_\beta$, die Koordinaten bezüglich der Basis β in Koordinaten bezüglich der Basis α umrechnet. Was steht in ihren Spalten? Verwenden Sie ${}^\alpha T_\beta$, um \vec{x}^α zu bestimmen. Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit der Zeichnung aus (a).
- Bestimmen Sie nun die Transformationsmatrix ${}^\beta T_\alpha$, die Koordinaten bezüglich der Basis α in Koordinaten bezüglich der Basis β umrechnet. Überlegen Sie sich dazu, was der Zusammenhang zwischen ${}^\alpha T_\beta$ und ${}^\beta T_\alpha$ ist.
- Nun sei eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch die Darstellungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis α gegeben. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix B von φ bezüglich β . Begründen Sie ihre Rechnung.

LÖSUNG: (a) Skizze:

- (b) In Spalte j von ${}^\alpha T_\beta$ steht \vec{b}_j^α , d.h.

$${}^\alpha T_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also folgt $\vec{x}^\alpha = {}^\alpha T_\beta \vec{x}^\beta = (5, 3)^\top$.

- (c) Es gilt ${}^\alpha T_\beta {}^\beta T_\alpha = I$, d.h.

$${}^\beta T_\alpha = {}^\alpha T_\beta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Für die Darstellungsmatrix B von φ bezüglich der Basis β gilt

$$B = {}^\beta T_\alpha A {}^\alpha T_\beta = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Anschaulich gesprochen, rechnet man zunächst Koordinaten bezüglich β in Koordinaten bezüglich α um. Anschließend wendet man die Matrix A an und rechnet dann wieder in Koordinaten bezüglich β zurück.

(G 23) (Transformation von Integralen I)

Durch die Menge $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq \frac{1}{2}\}$ wird eine Kugelkappe der Einheitskugel beschrieben. Veranschaulichen Sie diese Menge mit Hilfe einer Skizze und bestimmen Sie das Volumen von K . Verwenden Sie dazu eine geeignete Substitution (σ, τ) (schreiben Sie diese explizit hin!). Geben Sie außerdem eine Menge B an, so dass $\sigma(B) = K$ gilt.

LÖSUNG: Skizze: klar. Wir verwenden Zylinderkoordinaten, d.h.

$$\sigma : [0, \infty[\times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \sigma(r, \varphi, z) = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), z),$$

und

$$\tau(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) = r$$

Für

$$B := \{(r, \varphi, z) : 0 \leq r \leq \sqrt{1 - z^2}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \frac{1}{2} \leq z \leq 1\}$$

gilt $\sigma(B) = K$. Somit ergibt sich für das Volumen von K

$$\begin{aligned} \int_K 1 \, d(x, y, z) &= \int_B r \, d(r, \varphi, z) = \int_0^{2\pi} \int_{1/2}^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} r \, dr \, dz \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{1/2}^1 \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_{r=0}^{r=\sqrt{1-z^2}} dz \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_{1/2}^1 \frac{1}{2} (1 - z^2) dz \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} z - \frac{1}{6} z^3 \right]_{z=1/2}^{z=1} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{5}{48} d\varphi = \frac{5}{24} \pi. \end{aligned}$$

(G 24) (Transformation von Integralen II)

Sei $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\}$ und beschreibe

$$f : K \rightarrow \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto \frac{1}{1 + x^2 + y^2 + z^2}$$

die Ladungsdichte im Körper K . Berechnen Sie die Gesamtladung von K , indem Sie eine geeignete Substitution verwenden.

LÖSUNG: Wir verwenden Kugelkoordinaten, d.h.

$$\sigma : [0, \infty[\times [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \sigma(r, \varphi, \theta) = (r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta).$$

Es gilt $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Daher ist K eine Hohlkugel mit innerem Radius 1 und äußerem Radius $\sqrt{3}$. Für

$$B = \{(r, \varphi, \theta) : 1 \leq r \leq \sqrt{3}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

gilt $\sigma(B) = K$. Somit ergibt sich für die Gesamtladung

$$\begin{aligned}
 \int_K f(x, y, z) \, d(x, y, z) &= \int_1^{\sqrt{3}} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+r^2} r^2 \sin \theta \, d\varphi d\theta dr \\
 &= \int_1^{\sqrt{3}} \int_0^\pi \frac{2\pi}{1+r^2} r^2 \sin \theta \, d\theta dr \\
 &= 2\pi \int_1^{\sqrt{3}} \left[-\frac{r^2}{1+r^2} \cos \theta \right]_0^\pi dr \\
 &= 4\pi \int_1^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{1+r^2} \right) dr = 4\pi [r - \arctan r]_1^{\sqrt{3}} \\
 &= 4\pi \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} - 1 + \frac{\pi}{4} \right) = 4\pi \left(\sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12} \right).
 \end{aligned}$$

(G 25) (Transformation von Integralen III)

Berechnen Sie unter Verwendung einer geeigneten Substitution das Integral

$$\int_G (x^2 + y^2) d(x, y),$$

mit dem Integrationsbereich $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \sqrt{x-x^2}, 0 \leq x \leq 1\}$. Machen Sie sich zunächst eine Skizze von G .

Hinweis: Verwenden Sie $\cos^4(\varphi) = \frac{1}{8} (\cos 4\varphi + 4 \cos 2\varphi + 3)$.

LÖSUNG: Wir verwenden Polarkoordinaten, d.h.

$$\sigma : [0, \infty[\times [0, 2\pi], \quad \sigma(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Als erstes bestimmen wir nun ein B , so dass $\sigma(B) = G$ gilt: Wir nehmen $(x, y) \in \partial G$. Dann gilt $y = \sqrt{x-x^2}$. Somit erhalten wir $r^2 = x^2 + y^2 = x^2 + x - x^2 = x$, d.h. $r = \sqrt{x}$. Außerdem gilt $\cos \varphi = \frac{x}{r} = \sqrt{x} = r$. Das bedeutet der Radius r läuft im Intervall $[0, \cos \varphi]$. Der Winkel φ läuft im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$, da G im 1. Quadranten liegt. Somit gilt

$$B = \{(r, \varphi) : 0 \leq r \leq \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

Für das Integral ergibt sich nun

$$\begin{aligned}
 \int_G (x^2 + y^2) \, d(x, y) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos \varphi} r^3 \, dr d\varphi = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi \, d\varphi \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 4\varphi + 4 \cos 2\varphi + 3) \, d\varphi = \frac{1}{32} \left(\frac{1}{4} \sin 4\varphi + 2 \sin 2\varphi + 3\varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{1}{32} \left(3\frac{\pi}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Hausübungen

(H 22) (Transformation von Integralen; 4+4 Punkte)

Berechnen Sie jeweils unter Verwendung einer geeigneten Substitution die folgenden Integrale und machen Sie jeweils eine Skizze des Integrationsbereiches.

(a)

$$\int_G (x^2 + y^2) d(x, y)$$

mit Integrationsbereich $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \geq 1 \text{ oder } |y| \geq 1, x^2 + y^2 \leq 2\}$.

(b)

$$\int_Z \frac{z}{1+x^2+y^2} d(x,y,z)$$

mit Integrationsbereich $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$.

(H 23) (Volumen eines Kugelschalensektors; 5+4 Punkte)

(a) Gegeben sei der Kreisringsektor

$$K = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, z \geq 0, 9 \leq x^2 + z^2 \leq 81\}.$$

Machen Sie eine Skizze von K und geben Sie eine Menge B an, so dass $\sigma(B) = K$ gilt, wobei

$$\sigma : [0, \infty[\times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \sigma(r, \vartheta) = (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta).$$

die Polarkoordinaten beschreibt. Berechnen Sie den Flächeninhalt von K sowie den Schwerpunkt (x_s, z_s) der Fläche K . Geben Sie den Schwerpunkt außerdem in Polarkoordinaten (r_k, ϑ_k) an. Liegt (x_s, z_s) in K ?

(b) Berechnen Sie das Volumen des Kugelschalensektors

$$D = \{(r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta) : 3 \leq r \leq 9, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

Verwenden Sie dabei die Resultate aus Teil (a).

(H 24) (Determinante; 2 Punkte)

Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

indem Sie nach einer geeigneten Spalte oder Zeile entwickeln.