**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. C. Herrmann
René Hartmann
Michael Klotz
Tobias Hansel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009 15.5.2009

# Mathematik II für ET, WI(ET), SpoInf, iSt, BEd.ET, CE

## 5. Übung mit Lösungshinweisen

### Gruppenübungen

**(G 13) Maßtheorie am Dreieck**

Sie haben das durch die Eckpunkte $(0,0),(2,0),(2,1)$ gegebene Dreieck $\triangle$ vorliegen. Entwerfen Sie eine Zerlegung $Z_n$ von $\triangle$ aus Rechtecken, deren Weite für $n \to \infty$ verschwindet (Nachweis!). Benutzen Sie anschließend $Z_n$, um den Flächeninhalt des Dreiecks zu bestimmen! *Hinweis:* Es gilt $\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2$.

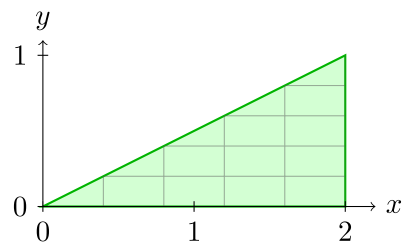
LÖSUNG: Die Zerlegung kann - muss aber nicht - aus Quadraten bestehen (siehe Kapitel 20.1.2 im Skript). Wir wählen hier z.B. als Teilintervalle $T_{ij}^{(n)}$ der Zerlegung

$$[\frac{2(i-1)}{n}, \frac{2i}{n}] \times [\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}], \quad (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2.$$

Der Flächeninhalt der $T_{ij}^{(n)}$ ist gerade $2/n^2$. Wie an der Skizze ersichtlich ist, gilt $T_{ij}^{(n)} \subseteq \triangle$ gerade dann, wenn $i > j$ ist. Bei festem $n$ sind dies $(1+2+\dots(n-1)) = n(n-1)/2$ der $T_{ij}^{(n)}$, also gilt

$$\mathrm{Vol}(Z_n) = \frac{n^2-n}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}$$

und $\mathrm{Vol}(\triangle) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Vol}(Z_n) = 1$.




Zerlegung $Z_n$ für $n = 5$.

**(G 14) Integration auf dem Einheitskreis**

Sie möchten das Integral der Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$ über dem Einheitskreis $\bigcirc := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ bestimmen.

a) Geben Sie eine Zerlegung $Z_n$ des Einheitskreises an, welche aus $n^2$ zueinander ähnlichen Kreisringstücken besteht. Dabei sollen jeweils der Radius $r \in [0,1]$ und die Winkel in immer kleiner werdende Stücke unterteilt sein. Verdeutlichen Sie sich Ihre Konstruktion anhand einer Skizze.

b) Bestimmen Sie mit Schulwissen oder Formelsammlung den Flächeninhalt der Kreisringstücke aus $Z_n$, sowie passende Stufenfunktionen $\underline{f}_n, \overline{f}^n$.

c) Bestimmen Sie $\int_{\bigcirc} f(x,y)d(x,y)$ mithilfe Ihrer Zerlegung. *Hinweis:* Es gilt $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ und $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$. *Tip:* Sie benötigen nur den führenden Koeffizienten, den von $n^3$.

LÖSUNG: a) Wir wählen die Kreisringstücke $T_{ij}^{(n)}$ mit Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} T_{ij}^{(n)} &= r_i^n \times \alpha_j^n,\ (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2, \\ r_i^n &= [\frac{i}{n+1}, \frac{i+1}{n+1}], i \in \{1,\ldots,n\}, \quad \text{Intervall der Radien} \\ \alpha_j &= [\frac{2\pi(j-1)}{n}, \frac{2\pi j}{n}], j \in \{1,\ldots,n\}, \quad \text{Intervall der Winkel.} \end{aligned}$$

Das innerste Stück von $Z_n$ ist gerade der Kreis von Radius $1/(n+1)$.

b) Ein Kreis von Radius $r$ hat Flächeninhalt $\pi r^2$, somit

$$\mu(T_{ij}^{(n)}) = ((\frac{i+1}{n+1})^2 - (\frac{i}{n+1})^2)\frac{\pi}{n} = \frac{1+2i}{n(n+1)^2}\pi.$$

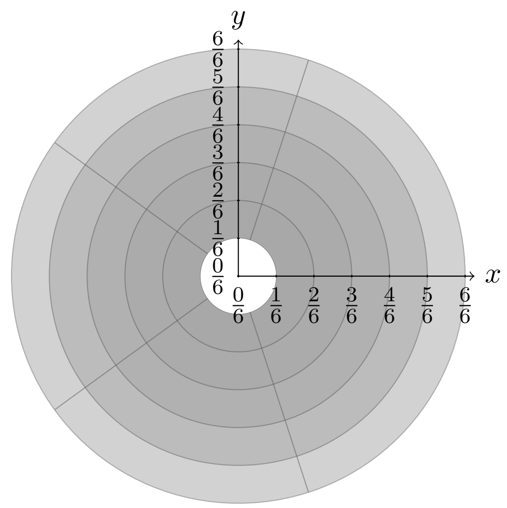
Das Volumen des innersten Stücks, des Kreises von Radius $1/(n+1)$, ist $\pi(n+1)^{-2}$ und verschwindet für $n \to \infty$. Da der Integrand an 0 stetig ist können wir sie in c) bei der Summation weglassen.
Wenn $g$ die Funktion $f$ für Polarkoordinaten ist, so gilt $g(r,\alpha) = r^2$. Als Stufenfunktionen kann man z.B.

$$\begin{aligned} \underline{g}_n(r) &= (\frac{i}{n+1})^2, \quad \text{falls } r \in r_i^n, \\ \overline{g}_n(r) &= (\frac{i+1}{n+1})^2, \quad \text{falls } r \in r_i^n, \end{aligned}$$

wählen.

c) Es ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\sum_{i,j=1}^n (\underline{g}_n)_{r_i}\mu(T_{ij}^{(n)}) &= \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{(n+1)^2} n \frac{1+2i}{n(n+1)^2} \\ &= (n+1)^{-4}\left(2\sum_{i=1}^n i^3 + \sum_{i=1}^n i^2\right) \\ &= \frac{n\left(3n^2+5n+1\right)}{6(n+1)^3} = -\frac{2}{3(n+1)} + \frac{1}{6(n+1)^3} + \frac{1}{2} \\ &\to \frac{1}{2} \text{ für } n \to \infty. \end{aligned}$$




Zerlegung $Z_n$ des Einheitskreisesfür $n = 5$. Der weiße Kreis mit Radius $1/6 = 1/(n+1)$ ist in $Z_n$, kann aber beim Summieren vernachläßigt werden.

### (G 15) Normalbereiche

Gegeben seien das in der Abbildung gezeigte Dreieck $\triangleright$ als Integrationsgebiet, sowie der Integrand $f(x, y) = x - y, (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Bestimmen Sie eine Zerlegung von $\triangleright$ in Normalbereiche.

b) Ermitteln Sie mithilfe dieser Normalbereiche das Integral $\int_{\triangleright} f(x, y) d(x, y)$.

Lösung: a) Zum Beispiel ist

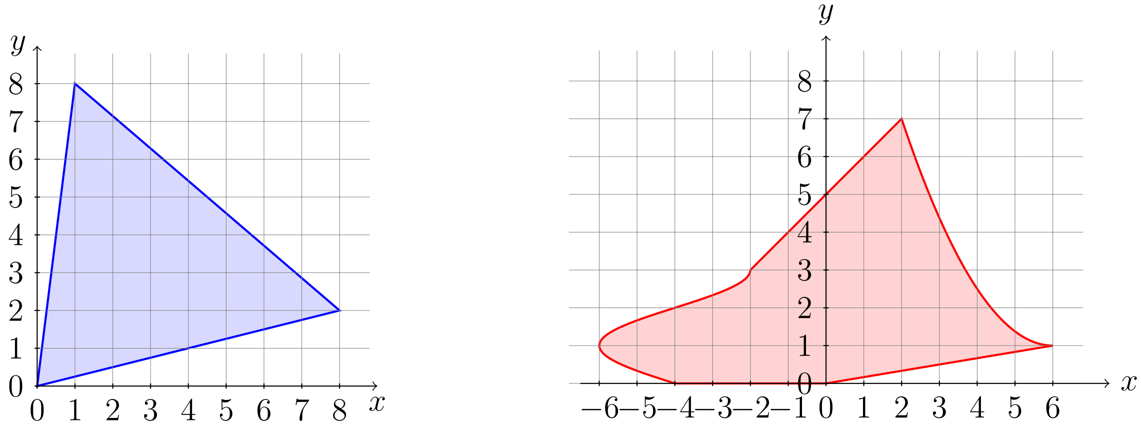
$$\underline{g}(x) := \frac{1}{4}x$$

$$\overline{g}(x) := \begin{cases} 8x & \text{falls } x \in [0, 1], \\ -\frac{6}{7}x + 8 + \frac{6}{7} & \text{falls } x \in [1, 8] \end{cases}$$

eine Zerlegung von $\triangleright$ in Normalbereiche.

b) Hier ist

$$\int_{\triangleright} f(x, y) d(x, y) = \int_0^1 \int_{\frac{1}{4}x}^{8x} f(x, y) dy dx + \int_1^8 \int_{\frac{1}{4}x}^{-\frac{6}{7}x+8+\frac{6}{7}} f(x, y) dy dx$$
$$= -\frac{775}{96} - \frac{217}{96} = -\frac{31}{3}.$$




*Links:* Das Dreieck $\triangleright$ aus **G15**. *Rechts:* Die Menge aus **H16**.

**(G 16) Matrizen als lineare Abbildungen, Teil 1**

Sei

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z)^T \mapsto (9z - x, 2y + 3x, x + y + z)^T$$

und

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z)^T \mapsto (3z - 2y - x, 5y)^T.$$

Schreiben Sie $f, g$ und $g \circ f$ in Matrizenform, z.B. bei der ersten Funktion $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ mit geeigneter Matrix $A$.

LÖSUNG: Es sind

$$M_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 9 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

und es gilt für $g \circ f$

$$M_{g \circ f} = M_g M_f = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -6 \\ 15 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

## Hausübungen

*Tip zu Hausaufgabe **H15**:* Es gilt

$$\sum_{j=3n}^{7n} \cos \frac{2\pi j}{8n} = \sum_{j=3n}^{7n} \sin \frac{2\pi j}{8n} = -\frac{\cot\left(\frac{\pi}{8n}\right)}{\sqrt{2}}.$$