Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
Tobias Hansel
René Hartmann
Michael Klotz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 09 8.5.2009

Mathematik II für ET, WI(ET), SpoInf, IST, BEd.ET, CE

4. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 9) (Potential)

Gegeben sei das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (x,y)$.

(a) Besitzt F ein Potential? Wenn ja, geben Sie alle Stammfunktionen (Potentiale) an.

(b) Berechnen Sie das Wegintegral $\int_X F \cdot \mathrm{d}X$, wobei X ein Weg mit Anfangspunkt $(-1,2)$ und Endpunkt $(2,3)$ ist.

(c) Sei X ein Weg, dessen Kurve ein Dreieck mit Eckpunkten $(0,0), (0,1), (1,0)$ darstellt. Zeigen Sie, dass $\int\limits_X F \cdot \mathrm{d}X = 0$ gilt.

LÖSUNG: (a) Alle Komponenten von $F = (F_1, F_2)$ sind partiell differenzierbar und es gilt

$$\partial_y F_1(x,y) = 0 \qquad = \qquad \partial_x F_2(x,y) = 0.$$

Also besitzt F nach Satz 19.32 ein Potential.

Die Stammfunktionen φ können aus der Definition 19.28 bestimmt werden:

$$F(x,y) = (\nabla\varphi)(x,y) \ ,$$

oder koordinatenweise

$$F_1(x,y) = \partial_x \varphi(x,y), \tag{1}$$
$$F_2(x,y) = \partial_y \varphi(x,y). \tag{2}$$

Damit lässt die Potentialfunktion φ sich als

$$\varphi(x,y) = \int F_1(x,y)\mathrm{d}x, \tag{3}$$
$$\varphi(x,y) = \int F_2(x,y)\mathrm{d}y \tag{4}$$

schreiben. Aus der Gleichung (3) ergibt sich:

$$\varphi(x,y) = \int x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + f(y) \ ,$$

wo f eine differenzierbare Funktion ist. Dann

$$\partial_y \varphi(x,y) = f'(y).$$

Im Vergleich mit Gleichung (2), bekommt man

$$f'(y) = F_2(x,y) = y \ ,$$

also $f(y) = \frac{y^2}{2} + c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Die Stammfunktionen sind dann

$$\varphi(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + c$$

mit der Konstante $c \in \mathbb{R}$.
Andere Lösung: Da F ein Potential besitzt, ist ihr Wegintegral wegunabhängig, und es hängt nur von dem Anfangspunkt und Endpunkt des Weges ab (siehe Satz 19.30). Um das Potential zu berechnen integrieren wir F nun entlang eines beliebigen Weges X von $(0,0)$ nach (x,y). Z.B. können wir $X = X_1 \oplus X_2$ wählen, wobei X_1 das Geradenstück zwischen $(0,0)$ und $(x,0)$ und X_2 das Geradenstück zwischen $(x,0)$ und (x,y) ist. Wir benutzen nun Formel (19.6) mit der Summe $X = X_1 \oplus X_2$:

$$\int_X F \cdot \mathrm{d}X = \int_{X_1} F \cdot \mathrm{d}X_1 + \int_{X_2} F \cdot \mathrm{d}X_2 \ .$$

- Erster Teil: $t \in [0,x]$, $X_1(t) = (t,0)$. Die Ableitung lautet $\dot{X}_1(t) = (1,0)$.

$$\begin{aligned}\int_{X_1} F \cdot \mathrm{d}X_1 &= \int_0^x \langle F(X_1(t)), \dot{X}_1(t)\rangle \mathrm{d}t = \int_0^x \langle F(t,0), (1,0)\rangle \mathrm{d}t \\ &= \int_0^x [F_1(t,0)\cdot 1 + F_2(t,0)\cdot 0]\mathrm{d}t = \int_0^x t\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^2}{2} \ .\end{aligned}$$

- Zweiter Teil: $t \in [0,y]$, $X_2(t) = (x,t)$. Die Ableitung lautet $\dot{X}_1(t) = (0,1)$ (die Ableitung ist bezüglich t, deshalb ist x nur eine Konstante).

$$\begin{aligned}\int_{X_2} F \cdot \mathrm{d}X_2 &= \int_0^y \langle F(X_2(t)), \dot{X}_2(t)\rangle \mathrm{d}t = \int_0^y \langle F(x,t), (0,1)\rangle \mathrm{d}t \\ &= \int_0^y [F_2(x,t)\cdot 0 + F_2(x,t)\cdot 1]\mathrm{d}t = \int_0^y t\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^y = \frac{y^2}{2} \ .\end{aligned}$$

  Die Summe ergibt:

$$\int_r F \cdot \mathrm{d}r = \int_{r_1} F \cdot \mathrm{d}r_1 + \int_{r_2} F \cdot \mathrm{d}r_2 = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \ .$$

  Um alle Stammfunktionen zu bestimmen, addiert man noch eine Konstante $c \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + c \ .$$

  (Das ist dasselbe Ergebnis wie vorher).

(b) Da die Funktion F ein Potential besitzt, ist das Integral nach Satz 19.36 wegunabhängig und hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt ab. Das Integral lässt sich nach Satz 19.36 folgendermaßen berechnen:

$$\int_X F \cdot \mathrm{d}X = \varphi(2,3) - \varphi(-1,2) = \left(\frac{4}{2} + \frac{9}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{2}\right) = 4. \ ,$$

(c) Die Funktion F besitzt ein Potential, deshalb ist ihr Wegintegral entlang eines geschlossenen Weges gleich Null (vgl. Satz 19.30). Da X geschlossen ist (sein Anfangspunkt und Endpunkt fallen zusammen), ist $\int\limits_X F \cdot \mathrm{d}X = 0$.

(G 10) (Stufenfunktionen / Integral)

Wir betrachten die Funktion $f : I = [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy$.

(a) Geben Sie für $n \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung Z_n von I in n^2 Teilintervalle an.

(b) Geben Sie zur Zerlegung Z_n zwei Stufenfunktionen $\underline{f}_n$, $\overline{f}_n$ mit $\underline{f}_n \leq f \leq \overline{f}_n$ an.

(c) Benutzen Sie die Stufenfunktionen aus (b) um zu zeigen, dass f auf I Riemann-integrierbar ist.

Lösung: (a) Man kann z.B. die Zerlegung Z_n so wählen, dass sie aus den Teilintervallen

$$I_{i,j} = [i\frac{1}{n}, (i+1)\frac{1}{n}] \times [j\frac{1}{n}, (j+1)\frac{1}{n}]$$

für $i, j = 0, \ldots, n-1$ besteht.

(b) Für $x \in I_{i,j}$ $(i, j = 0, \ldots, n-1)$ definieren wir

$$\underline{f}_n(x) = i\frac{1}{n} \cdot j\frac{1}{n} \quad \text{und} \quad \overline{f}_n(x) = (i+1)\frac{1}{n} \cdot (j+1)\frac{1}{n}.$$

Dies legt zwei Stufenfunktionen, mit der gewünschten Eigenschaft fest.

(c) Es gilt

$$\int_I \underline{f}_n(x,y)d(x,y) = \sum_{i,j=0,\ldots,n-1} ij \cdot \frac{1}{n^4}$$

und

$$\int_I \overline{f}_n(x,y)d(x,y) = \sum_{i,j=0,\ldots,n-1} (i+1)(j+1) \cdot \frac{1}{n^4}.$$

Also folgt

$$\int_I \overline{f}_n(x,y)d(x,y) - \int_I \underline{f}_n(x,y)d(x,y) = (n)^2 \cdot \frac{1}{n^4} = \frac{1}{n}^2 \to 0$$

für $n \to \infty$. Nach Korollar 20.4 ist f also Riemann-integrierbar auf I.

(G 11) (Satz von Fubini)

(a) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ das Quadrat mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ und $(1,1)$. Begründen Sie, warum die Funktion $f\colon A \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := x^2 + y^3 + 2xy^2$$

Riemann-integrierbar ist, und berechnen Sie dann das Integral $\int_A f(x,y)\ d(x,y)$.

(b) Wir betrachten den Quader $Q := A \times [0,5] \subseteq \mathbb{R}^3$ und die Funktion $g\colon Q \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x,y,z) := (x^2 + y^3 + 2xy^2)z.$$

Begründen Sie, warum die Funktion g Riemann-integrierbar ist, und berechnen Sie dann das Integral $\int_Q g(x,y,z)\, d(x,y,z)$.

LÖSUNG: Da es sich bei f und g um stetige Funktionen auf kompakten Intervallen im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ handelt, sind die Funktionen Riemann-integrierbar (Theorem 20.9). Außerdem ist für festes y die Funktion $f_y(x) = f(x,y)$ stetig und somit ebenfalls integrierbar. Mit dem Satz von Fubini (Satz 20.12) können wir die zu berechnenden Integrale zu iterierten Integralen umschreiben:

(a)

$$\begin{aligned}
\int_A f(x,y)\,d(x,y) &= \int_{[0,1]\times[0,1]} (x^2+y^3+2xy^2)\,d(x,y) \\
&= \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} (x^2+y^3+2xy^2)\,dx \right) dy \\
&= \int_{[0,1]} \Big[x^3/3+xy^3+x^2y^2\Big]_{x=0}^{x=1} dy \;=\; \int_0^1 (1/3+y^3+y^2)\,dy \\
&= \Big[y/3+y^4/4+y^3/3\Big]_0^1 \;=\; 1/3+1/4+1/3 \;=\; 11/12\,.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int_Q g(x,y,z)\,d(x,y,y) &= \int_{A\times[0,5]} f(x,y)z\,d(x,y,z) \\
&= \int_{[0,5]} \left(\int_A f(x,y)z\,d(x,y) \right) dz \\
&= \int_{[0,5]} z \left(\int_A f(x,y)\,d(x,y) \right) dz \\
&= \int_0^5 \frac{11}{12} z\,dz \;=\; \left[\frac{11}{24}z^2\right]_0^5 \;=\; \frac{11\cdot 25}{24} \;=\; \frac{275}{24}
\end{aligned}$$

(G 12) (Jordan-Messbarkeit)

Kreuzen Sie alle wahren bzw. allgemeingültigen Aussagen an.

- ☐ Das Intervall $[1,2]\times[3,4]\times[0,5]\subseteq\mathbb{R}^3$ ist Jordan-messbar und hat Jordan-Inhalt 5.
- ☐ Das Intervall $(1,2)\times[3,4)\times[0,5]\subseteq\mathbb{R}^3$ ist Jordan-messbar und hat Jordan-Inhalt 5.
- ☐ Eine Menge im $\mathbb{R}^n$, die aus einem einzigen Punkt besteht, ist Jordan-messbar und hat den Inhalt 0, d.h., sie ist eine (Jordansche) Nullmenge.
- ☐ Sind $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, so sind auch $A\cup B$, $A\cap B$ und $A\backslash B$ Jordan-messbar.
- ☐ Sind $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, so ist auch $A\cup B$ Jordan-messbar und hat Inhalt $\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)$.

LÖSUNG: Die Aussagen 1-4 sind wahr. Die Aussage 5 ist falsch.