Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
Tobias Hansel
René Hartmann
Michael Klotz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 09 24.4.2009

Mathematik II für ET, WI(ET), SpoInf, IST, BEd.ET, CE

2. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

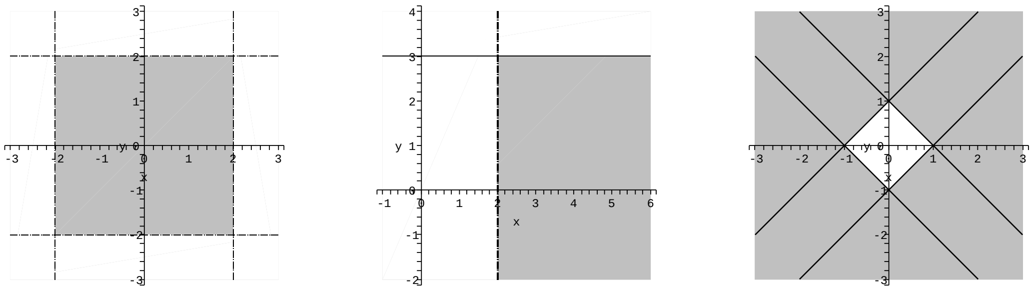
(G 5) (Mengen im $\mathbb{R}^n$)

Skizzieren Sie die Mengen

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x|,|y|) < 2\}, \\ B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 2,\ y \leq 3\} \text{ und} \\ C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \geq 1\} \end{aligned}$$

und geben Sie jeweils (mit Begründung!) an, ob sie offen, abgeschlossen, beschränkt bzw. kompakt sind.

Lösung: Skizzen:



zu A:

- offen, denn für jedes $(x,y) \in A$ ist $|x| < 2$ und $|y| < 2$, also gibt es ein $\epsilon_x > 0$ mit $|x| + \epsilon_x < 2$ und ein $\epsilon_y > 0$ mit $|y| + \epsilon_y < 2$. Für $\epsilon = \min\{\epsilon_x, \epsilon_y\}$ liegt die ϵ-Umgebung um (x,y) also in A. Also ist jeder Punkt von A innerer Punkt, d.h. A ist offen.
- nicht abgeschlossen, denn $(2,0)$ ist ein Randpunkt von A (jede ϵ-Umgebung von $(2,0)$ enthält den Punkt $(2-\frac{\epsilon}{2},0) \in A$ und den Punkt $(2+\frac{\epsilon}{2},0) \notin A$) daher $(2,0) \notin A$.
- beschränkt, da für alle $(x,y) \in A$ gilt

$$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}.$$

- nicht kompakt, da nicht abgeschlossen.

zu B:

- nicht offen, denn $(3,3) \in B$, aber $(3,3)$ ist kein innerer Punkt von B, denn in jeder ϵ-Umgebung von $(3,3)$ liegt der Punkt $(3, 3+\frac{\epsilon}{2})$, der nicht zu B gehört.
- nicht abgeschlossen, denn $(2,0) \in \partial B$ (Begründung wie oben), aber $(2,0) \notin B$.
- nicht beschränkt, denn $(3,n) \in B \ \forall n \in \mathbb{N}$ und

$$\lim_{n\to\infty} \|(3,n)\| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{9+n^2} = \infty.$$

- nicht kompakt, da nicht abgeschlossen.

zu C:

- nicht offen, denn $(-1,0) \in C$, aber ist kein innerer Punkt.
- abgeschlossen, denn $\partial C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\} \subseteq C$.
- nicht beschränkt, denn $(n,0) \in C \ \forall n \in \mathbb{N}$.
- nicht kompakt, da nicht beschränkt.

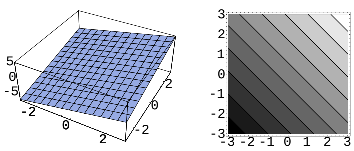
(G 6) (Funktionen in 2 Variablen)

Wir betrachten die folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

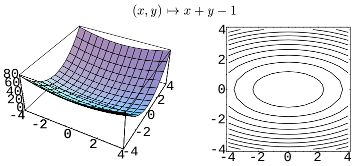
$$\begin{array}{lll}
f_1(x,y) = x+y-1, & f_2(x,y) = x^2+4y^2, & f_3(x,y) = x^2-y^2-8, \\
f_4(x,y) = \sin(x), & f_5(x,y) = \frac{1}{(1-x)(1-y)}, & f_6(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+10}, \\
f_7(x,y) = \ln(x^2+y^2), & f_8(x,y) = \tan(x^2+y^2), & f_9(x,y) = e^{x+y}, \\
f_{10}(x,y) = x^3-y^2+4, & f_{11}(x,y) = \sin(x)\cdot\sin(y). &
\end{array}$$

Die Graphen und Niveaumengen (Höhenlinien) dieser Funktionen sind auf dem Extrablatt angegeben. Allerdings ist die Reihenfolge etwas durcheinander geraten. Ordnen Sie den Graphen und Höhenlinien die richtigen Funktionen f_i $(i = 1, \ldots, 11)$ zu.
Beachten Sie, dass die Auflösungsmöglichkeiten des Rechners begrenzt sind, so dass einige Bilder ungenau sind.
Zur Erinnerung: Die Niveaumenge (Höhenlinie) einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist die Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = c\}$ für vorgegebenes $c \in \mathbb{R}$

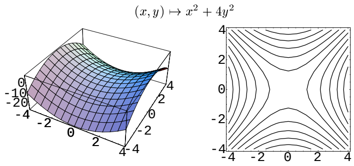
LÖSUNG:



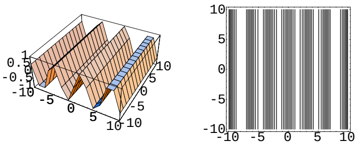
$(x,y) \mapsto x+y-1$



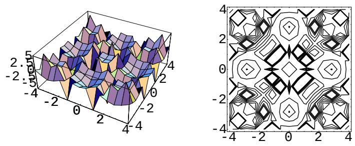
$(x,y) \mapsto x^2+4y^2$



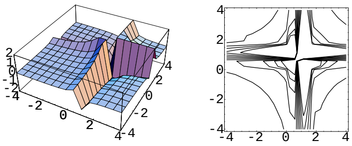
$(x,y) \mapsto x^2-y^2-8$



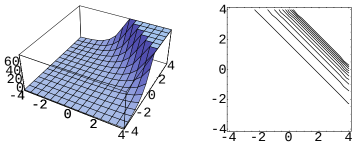
$(x,y) \mapsto \sin(x)$



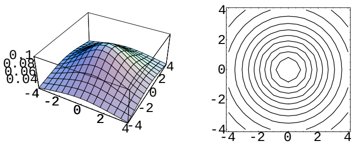
$(x,y) \mapsto \tan(x^2+y^2)$



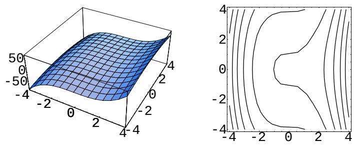
$(x,y) \mapsto \frac{1}{(1-x)(1-y)}$



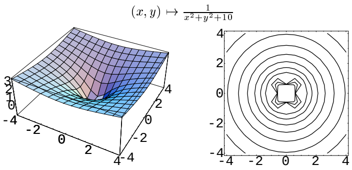
$(x,y) \mapsto e^{x+y}$



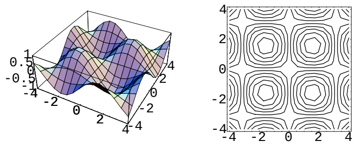
$(x,y) \mapsto \frac{1}{x^2+y^2+10}$



$(x,y) \mapsto x^3-y^2+4$



$(x,y) \mapsto \log(x^2+y^2)$



$(x,y) \mapsto \sin(x)\cdot\sin(y)$

(G 7) (Niveaumengen, Stetigkeit)

Sei $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0\}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{y}.$$

Skizzieren Sie die Niveaumengen (Höhenlinien) $\{(x,y) : f(x,y) = c\}$ für die Werte $c = 1$, $c = 2$ und $c = 3$.
Ist f stetig auf D? Lässt sich f zu einer stetigen Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fortsetzen? Überlegen Sie sich dies zuerst anschaulich und versuchen Sie dies dann zu beweisen.

LÖSUNG: Die Höhenlinie zur Höhe $c \in \mathbb{R}$ besteht aus allen $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) = c$. Wir berechnen:

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{y} = c \Leftrightarrow x^2 + y^2 - cy = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{c}{2}\right)^2 - \frac{c^2}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{c}{2}\right)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

Somit ist die Höhenlinie zur Höhe c ein Kreis mit Mittelpunkt $(0, c/2)$ und Radius $c/2$.

In D ist f als Zusammensetzung von stetigen Funktionen stetig. Problematisch wird es nur für $y = 0$.
Anschaulich kann f in $(0,0)$ nicht stetig sein, denn $(0,0)$ liegt auf jeder Höhenlinie, d.h. $f(0,0)$ müsste auf jeder Höhe liegen. Ein analytisches Argument ist das folgende:
Es gilt $\lim_{y\to 0}(0,y) = (0,0)$ und $\lim_{y\to 0}(\sqrt{y}, y) = (0,0)$. Allerdings gilt auch

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0+y^2}{y} = \lim_{y\to 0} y = 0$$

und

$$\lim_{y\to 0} f(\sqrt{y}, y) = \lim_{y\to 0} \frac{y+y^2}{y} = \lim_{y\to 0}(1+y) = 1.$$

Somit kann f nicht stetig in $(0,0)$ fortgesetzt werden.

(G 8) (Partielle Ableitung)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \cos(x+y-1)\cdot y^7 + \log(y)\cdot x^7 \cdot \log\left(1+\frac{\sin^2(xy)}{1+y^4}\right)\cdot \arctan\left(\frac{1+x^2y^4}{3+x^4}\right).$$

Bestimmen Sie $\frac{\partial}{\partial x} f(x,1)$.
Hinweis: Es wird hier nicht verlangt, dass man $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ allgemein berechnet. Beachten Sie, dass beim partiellen Differenzieren nach x, die Variable y als konstant betrachtet wird.

LÖSUNG: Wir machen uns zunächst klar, dass $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ die Ableitung von f ist, die wir erhalten, wenn wir y als konstant betrachten. Daher können wir um $\frac{\partial}{\partial x} f(x,1)$ zu bestimmen, zunächst $y = 1$ setzen und dann nach x ableiten. Da $\log(1) = 0$ gilt, erhalten wir $f(x,1) = \cos(x)$ und somit $\frac{\partial}{\partial x} f(x,1) = -\sin(x)$.