**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. C. Herrmann
René Hartmann
Michael Klotz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009 17.4.2009

# Mathematik II für ET, WI(ET), SpoInf, iSt, BEd.ET, CE

## 1. Übung

## Gruppenübungen

### (G 1) Rektifizierbarkeit & Bogenlänge

a) Bestimmen Sie die Bogenlänge der beiden Wege

(i) $\vec{f} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\vec{f}(t) = (r \cos t, r \sin t, ct)$, wobei $r, c > 0$.

(ii) $\vec{g} : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, $\vec{g}(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$.

Skizzieren Sie $\vec{f}$ für die Parameter $r = 1, c = 1/(2\pi)$.

b) Sei $a < b \in \mathbb{R}$ und $\vec{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz-stetige Funktion mit Lipschitz Konstante $c$:

$$\|\vec{f}(x) - \vec{f}(y)\| \leq c|x - y|.$$

Beweisen Sie:

i) $\vec{f}$ ist rektifizierbar.

ii) Es gilt $L(\vec{f}) \leq c(b - a)$.

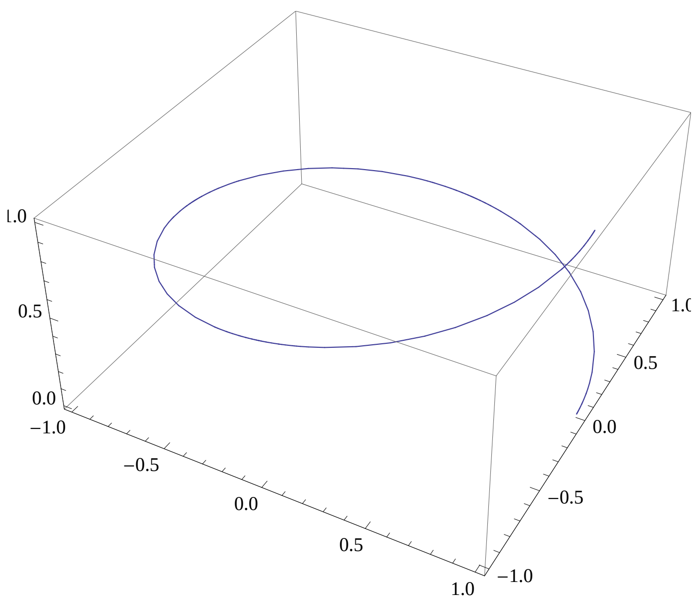


Abbildung 1: Die Funktion $\vec{f}$ mit Parametern $r = 1, c = 1/(2\pi)$.

a) Mit dem Theorem aus dem Skript ist

(i) $\frac{\partial \vec{f}}{\partial t} = (-r\sin t, r\cos t, c)$ and $\|\frac{\partial \vec{f}}{\partial t}\|^2 = r^2 + c^2$. Daher

$$L(\vec{f}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2+c^2}\mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{r^2+c^2}.$$

(ii) $\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} = (\sinh t, \cosh t, 1)$ and $\|\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}\| = \sinh^2 t + \cosh^2 t + 1 = 2\cosh^2 t$. Deshalb

$$L(\vec{g}) = \int_0^1 \sqrt{2}\cosh t dt = \sqrt{2}\sinh 1.$$

b) Sei $F = \{x_0, \dots, x_n\}$ eine endliche Teilmenge von $[a,b]$, welche $\{a,b\}$ enthält. Dann gilt

$$L(\vec{f})_F = \sum_{k=1}^{n} \|\vec{f}(x_k) - \vec{f}(x_{k-1})\| \leq \sum_{k=1}^{n} c\|x_k - x_{k-1}\| = c(b-a)$$

Dies zeigt dass $\vec{f}$ rektifizierbar ist und $L(\vec{f}) \leq c(b-a)$. □

### (G 2) Wegintegrale

Gegeben seien die Funktionen

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} 6xy - 1 + y^2 \\ 3x^2 + 15y^2 \end{pmatrix}, \quad G(x,y) = \begin{pmatrix} 12y^2 + 6x^2 \\ 24xy + 5y^4 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie das Integral von $F$ entlang zweier verschiedener Wege von $(0,0)$ nach $(1,1)$, die Sie sich frei aussuchen dürfen! Skizzieren Sie kurz Ihre beiden Wege. Hängt das Integral von dem Weg ab?

b) Wie a) nur für die Funktion $G$ anstelle von $F$. Wie verhält es sich hier mit der Abhängigkeit vom gewählten Weg?

$F$ ist nicht exakt, das Integral somit wegabhängig. $G$ besitzt das Potential $g = 12xy^2 + 2x^3 + y^5$, also für $\Gamma$ ein beliebiger Weg von $(0,0)$ nach $(1,1)$ folgt $\int_\Gamma G dX = g(1,1) - g(0,0) = 15$.

### (G 3) Minitest

Überlege kurz(!), welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch ist. (Der Minitest soll nicht mehr als **5 Minuten** in Anspruch nehmen.)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- □ Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.
- □ Wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.
- □ Wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine positive Nullfolge.

---

- □ Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.
- ■ Wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.
- □ Wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine positive Nullfolge.

## (G 4) Reihen

Überprüfen Sie anhand geeigneter Kriterien, ob die folgenden Reihen konvergieren bzw. absolut konvergieren. Bestimmen Sie für (i) und (v) den Grenzwert der Reihe.

$$(i)\ \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{2+(-3)^k}{4^k} \qquad (ii)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \tfrac{n+1}{n}$$

$$(iii)\ \sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n \qquad (iv)\ \sum_{n=2}^{\infty}(\tfrac{1}{\sqrt{n}-1}+\tfrac{1}{\sqrt{n}+1})$$

$$(v)\ \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{28+(-3)^{k-1}}{4^{k+2}} \qquad (vi)\ \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n\sqrt{n}}.$$

(i) Es gilt

$$\left|\tfrac{2+(-3)^k}{4^k}\right| \le \tfrac{2+3^k}{4^k} \le \tfrac{2\cdot 3^k}{4^k} = 2\cdot\left(\tfrac{3}{4}\right)^k.$$

Die Reihe $2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)$ ist eine geometrische Reihe und konvergiert demzufolge. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2+(-3)^k}{4^k}$ absolut. Der Genzwert der Reihe lautet

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2+(-3)^k}{4^k} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{4^k}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-3)^k}{4^k} \qquad \text{(Auseinanderziehen der Summe wg. Konv. mgl.!)}\\ &= 2\sum_{k=0}^{\infty}\big(\frac{1}{4}\big)^k+\sum_{k=0}^{\infty}\big(-\frac{3}{4}\big)^k = 2\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}+\frac{1}{1+\frac{3}{4}}\\ &= \frac{68}{21}.\end{aligned}$$

(ii) Diese Reihe ist nicht konvergent, denn für $a_n = (-1)^n\cdot\frac{n+1}{n}$ gilt NICHT $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, im Gegenteil, die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert selbst nicht.

(iii) Sei $a_n = \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$, dann

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left|\sqrt[n]{n}-1\right|.$$

Wegen

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = \exp\{\tfrac{1}{n}\cdot\ln n\}$$

und

$$\lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{n}\ln n = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{n} = 0$$

(Regel von de l'Hospital) folgt $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$. Es existiert also ein $N\in\mathbb{N}$, so daß für alle $n > N$ gilt:

$$\left|\sqrt[n]{n}-1\right| < \tfrac{1}{2}.$$

Dies wiederum bedeutet für alle $n > N$

$$\sqrt[n]{a_n} = \left|\sqrt[n]{n}-1\right| < \tfrac{1}{2} < 1$$

und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n$ konvergiert nach dem Wurzelkriterium absolut.

(iv) Sei $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}-1}+\frac{1}{\sqrt{n}+1}$, dann gilt

$$a_n = \frac{2\sqrt{n}}{n-1} = 2\frac{\sqrt{n}}{n-1} > 2\frac{\sqrt{n}}{n} = 2\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{2}{n}.$$

Die Reihe $2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ist jedoch divergent (harmonische Reihe) und mit dem Minorantenkriterium folgt auch die Divergenz der Reihe $\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}-1}+\frac{1}{\sqrt{n}+1})$.

(v) Es gilt

$$\left|\frac{28+(-3)^{k-1}}{4^{k+2}}\right| \le \frac{28+3^{k-1}}{4^{k+2}} \le \frac{28\cdot 3^k}{4^k}\cdot\frac{1}{3\cdot 4\cdot 4} = \frac{7}{12}\cdot\Big(\frac{3}{4}\Big)^k.$$

Die Reihe $\frac{7}{12}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^k$ konvergiert (geometrische Reihe) und nach dem Majoranten-kriterium konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{28+(-3)^{k-1}}{4^{k+2}}$.
Der Grenzwert der Reihe berechnet sich gemäß

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\frac{28+(-3)^{k-1}}{4^{k+2}} &= \frac{1}{4^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{28+(-3)^{k-1}}{4^{k-1}} \\
&= \frac{1}{64}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{28+(-3)^k}{4^k} \\
&= \frac{1}{64}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{28}{4^k}+\sum_{k=0}^{\infty}\Big(-\frac{3}{4}\Big)^k\Big) \\
&= \frac{28}{64}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}+\frac{1}{64}\cdot\frac{1}{1+\frac{3}{4}} = \frac{7}{12}+\frac{1}{112}.
\end{aligned}$$

(vi) Man benutzt das Integralkriterium mit $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x}}$, $D(f)=[1,\infty[$. Die Funktion $f$ ist auf ihrem Definitionsbereich stetig, positiv, monoton fallend und es gilt

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty}\tfrac{1}{x\sqrt{x}}dx = \int_1^{\infty} x^{-\frac{3}{2}} = -2x^{-\frac{1}{2}}\Big|_1^{\infty} = 2.$$

Da das Integral existiert, konvergiert auch die Reihe.