Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
Dipl.-Math. Tobias Hansel
Dipl.-Math. Rene Hartmann
Dipl.-Math. Michael Klotz

**Technische Universität Darmstadt**

SS 2009
10.07.2009

# 13. Übungsblatt zur „Mathematik II für ET, WI(ET), SpoInf, IkT, IST, CE, Mechatronik“

## Gruppenübung

**Aufgabe G44** (Taylorentwicklung)

Gegeben sei die Funktion $f : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, mit

$$f(x, y) = x^4 \ln(xy) .$$

(a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $D^{(0,0)}f(x, y)$, $D^{(1,0)}f(x, y)$, $D^{(0,1)}f(x, y)$, $D^{(2,0)}f(x, y)$, $D^{(0,2)}f(x, y)$ und $D^{(1,1)}f(x, y)$.

(b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung um den Entwicklungspunkt $(1, 1)$, also:

$$j^2_{(1,1)}(h) = \sum_{|\alpha|\le 2} \frac{1}{\alpha!}(D^\alpha f)(1, 1)h^\alpha.$$

Oder so notiert: $j^2_{(1,1)}((x, y) - (1, 1)) = \sum_{|\alpha|\le 2} \frac{1}{\alpha!}(D^\alpha f)(1, 1)((x, y) - (1, 1))^\alpha$.

(c) Für jedes $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, für das die Verbindungsstrecke zwischen $(1, 1)$ und $(1, 1) + h$ im Definitionsbereich der Funktion $f$ ist, gibt es dann nach dem Satz von Taylor ein $\tau \in ]0, 1[$, sodass

$$f((1, 1) + h) = j^2_{(1,1)}(h) + \text{Restglied} = \sum_{|\alpha|\le 2} \frac{1}{\alpha!}(D^\alpha f)(1, 1)h^\alpha + \sum_{|\alpha|=3} \frac{(D^\alpha f)((1, 1) + \tau h)}{\alpha!}h^\alpha$$

gilt. Der Funktionswert $f(1, 0.8)$ lässt sich durch das Taylorpolynom approximieren. Schätzen Sie den Fehler nach oben ab, den Sie dabei begehen, indem Sie das Restglied abschätzen.
*Hinweis:* Anstatt für das Restglied alle partiellen Ableitungen dritter Ordnung von $f$ auszurechnen, denken Sie erst darüber nach, welche sie danach wirklich benötigen.

**Lösung:**

(a)(b) Die benötigten partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\big((D^{(0,0)}f)(x,y)=\big) \quad & f(x,y)=x^4\ln(xy), && f(1,1)=0\\
\big((D^{(1,0)}f)(x,y)=\big) \quad & f_x(x,y)=4x^3\ln(xy)+x^3, && f_x(1,1)=1\\
\big((D^{(0,1)}f)(x,y)=\big) \quad & f_y(x,y)=\frac{x^4}{y}, && f_y(1,1)=1\\
\big((D^{(2,0)}f)(x,y)=\big) \quad & f_{xx}(x,y)=12x^2\ln(xy)+7x^2, && f_{xx}(1,1)=7\\
\big((D^{(0,2)}f)(x,y)=\big) \quad & f_{yy}(x,y)=-\frac{x^4}{y^2}, && f_{yy}(1,1)=-1\\
\big((D^{(1,1)}f)(x,y)=\big) \quad & f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=\frac{4x^3}{y}, && f_{xy}(1,1)=4\ .
\end{aligned}$$

Damit lautet das gesuchte Taylorpolynom

$$\begin{aligned}
j^2_{(1,1)}(h_1,h_2) &= f(1,1)+f_x(1,1)h_1+f_y(1,1)h_2+f_{xx}(1,1)\frac{h_1^2}{2}\\
&\quad + f_{xy}(1,1)h_1h_2+f_{yy}(1,1)\frac{h_2^2}{2}\\
&= 0+h_1+h_2+\frac{7}{2}h_1^2+4h_1h_2-\frac{1}{2}h_2^2
\end{aligned}$$

oder so:

$$\begin{aligned}
j^2_{(1,1)}(x-1,y-1) &= f(1,1)+f_x(1,1)(x-1)+f_y(1,1)(y-1)+f_{xx}(1,1)\frac{(x-1)^2}{2}\\
&\quad + f_{xy}(1,1)(x-1)(y-1)+f_{yy}(1,1)\frac{(y-1)^2}{2}\\
&= 0+(x-1)+(y-1)+\frac{7}{2}(x-1)^2+4(x-1)(y-1)-\frac{1}{2}(y-1)^2
\end{aligned}$$

(c)

$$h=(1,0.8)-(1,1)=(0,-0.2)$$

Das Restglied ist:

$$\begin{aligned}
R(h) &= \sum_{|\alpha|=3}\frac{(D^\alpha f)((1,1)+\tau h)}{\alpha!}h^\alpha = \frac{(D^{(0,3)}f)(1,1-0.2\tau)}{0!\cdot 3!}0^0(-0.2)^3\\
&= \frac{1}{3!}(-0.2)^3 f_{yyy}(1,1-0.2\tau), \quad \text{mit einem } \tau\in(0,1),
\end{aligned}$$

denn $h^\alpha$ ist für alle $\alpha$ gleich 0, außer für $\alpha=(0,3)$. (Beispiel: $h^{(1,2)}=0^1\cdot(-0.2)^2=0$. Hinweis: Man beachte, dass $x^0$ im Kontext von Polynomen/Reihen immer als 1 definiert wird, also dass $0^0=1$ gilt.)
Wir haben $f_{yyy}(x,y)=\frac{2x^4}{y^3}$.

Restgliedabschätzung:

$$
\begin{aligned}
R(h) &= \frac{1}{3!}(-0.2)^3 f_{yyy}(1, 1-0.2\tau),\\
&= \frac{1}{6}(-0.2)^3 \frac{2\cdot 1^4}{(1-0.2\tau)^3}\\
|R(h)| &\le \frac{4}{3}10^{-3} \sup_{\tau\in(0,1)} \frac{2}{(1-0.2\tau)^3}\\
&= \frac{4}{3}10^{-3}\frac{2}{(0,8)^3} \approx 5,2083\cdot 10^{-3}\ .
\end{aligned}
$$

**Aufgabe G45** (Extremwertbestimmung: ein Vergleich)

Wir vergleichen die Extremwertbestimmung von reellen Funktionen $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit einer Veränderlichen mit Funktionen $f\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ mit mehreren Veränderlichen.
Falls $f$ differenzierbar bzw. stetig partiell differenzierbar ist, ist die notwendige Bedinung für eine lokale Extremstelle $x$:

| $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ diff.bar | $f\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ stetig partiell diff.bar | Man nennt $x$ einen... |
|---|---|---|
| $f'(x)=0$ | $(\text{grad } f)(x)=0$ | stationären Punkt |

Sei nun die Funktion $f$ zweimal differenzierbar bzw. zweimal stetig partiell differenzierbar und sei $x$ ein stationärer Punkt. Vervollständigen Sie die folgende Tabelle:

| $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2mal diff.bar | $f\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 2mal stetig partiell diff.bar | Dann ist bei $x$ ein... |
|---|---|---|
| $f''(x)>0$ | $(\text{Hess } f)(x)$ ist | lokales Minimum |
| $f''(x)<0$ | $(\text{Hess } f)(x)$ ist | lokales Maximum |
| — | $(\text{Hess } f)(x)$ ist | Sattelpunkt |
| $f''(x)=0$ | $(\text{Hess } f)(x)$ ist | (wir wissen es nicht) |

mit den Einträgen:

(a) indefinit

(b) positiv definit

(c) negativ definit

(d) (positiv/negativ) semidefinit

**Lösung:**

| $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2mal diff.bar | $f\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 2mal stetig partiell diff.bar | Dann ist bei $x$ ein... |
|---|---|---|
| $f''(x)>0$ | $(\text{Hess } f)(x)$ ist positiv definit | lokales Minimum |
| $f''(x)<0$ | $(\text{Hess } f)(x)$ ist negativ definit | lokales Maximum |
| — | $(\text{Hess } f)(x)$ ist indefinit | Sattelpunkt |
| $f''(x)=0$ | $(\text{Hess } f)(x)$ ist semidefinit | (wir wissen es nicht) |

**Aufgabe G46** (Extremwertbestimmung)

Gegeben sei die Funktion $f\colon (\mathbb{R}\setminus\{0\})\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})\to\mathbb{R}$, mit

$$
f(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - 9x + 4y\ .
$$

(a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von $f$. (Stationäre Punkte sind die Kandidaten für lokale Extrema.)

(b) Bestimmen Sie alle Stellen, in denen die Funktion ein lokales Extremum hat und geben Sie jeweils an, ob es sich um ein lokales Maximum oder Minimum handelt.

**Lösung:** Den Gradienten nullsetzen:

$$(\operatorname{grad} f)(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2} - 9 \\ -\frac{1}{y^2} + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\frac{1}{3}, \quad y = \pm\frac{1}{2}\ .$$

Kandidaten für Extremstellen sind also

$$(x_1,y_1) = (\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2}), \quad (x_2,y_2) = (\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{2}), \quad (x_3,y_3) = (-\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2}), \quad (x_4,y_4) = (-\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{2})\ .$$

Klassifizieren mit der Hesse-Matrix:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{Hess} f)(x,y) &= \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{x^3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{y^3} \end{pmatrix} \\
(\operatorname{Hess} f)(x_1,y_1) &= \begin{pmatrix} -54 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{pos./neg. Eigenwerte: Sattelpunkt} \\
(\operatorname{Hess} f)(x_2,y_2) &= \begin{pmatrix} -54 & 0 \\ 0 & -16 \end{pmatrix} \quad \text{nur neg. Eigenwerte: lok. Maximum} \\
(\operatorname{Hess} f)(x_3,y_3) &= \begin{pmatrix} 54 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{nur pos. Eigenwerte: lok. Minimum} \\
(\operatorname{Hess} f)(x_4,y_4) &= \begin{pmatrix} 54 & 0 \\ 0 & -16 \end{pmatrix} \quad \text{pos./neg. Eigenwerte: Sattelpunkt}
\end{aligned}$$

**Aufgabe G47** (Erinnerung)

Kreuzen Sie korrekte Aussagen an:

- ☒ Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.
- ☐ Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt kompakt, wenn sie offen und beschränkt ist.
- ☒ Jede stetige reelle Funktion $f\colon K \to \mathbb{R}$ auf einer kompakten Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ nimmt ein Maximum und ein Minmum an.

**Aufgabe G48** (Methode von Lagrange)

Bestimmen Sie mithilfe einer Lagrange-Funktion die Extremwerte von

$$f(x,y) = xy, \quad x,y \in \mathbb{R},$$

unter der Nebenbedingung $x^2 + 4y^2 - 2 = 0$.

**Lösung:** Die Lagrange-Funktion lautet $L(x,y,\lambda) = xy + \lambda(x^2+4y^2-2)$. Jede lokale Extremalstelle $(x,y)$ (unter der Nebenbedingung) erfüllt:

$$\begin{aligned}
L_x(x,y,\lambda) &= y + 2\lambda x \overset{!}{=} 0, \\
L_y(x,y,\lambda) &= x + 8\lambda y \overset{!}{=} 0, \\
L_\lambda(x,y,\lambda) &= x^2 + 4y^2 - 2 \overset{!}{=} 0.
\end{aligned}$$

Aus Gleichung 1 ergibt sich $y = -2\lambda x$, mit Gleichung 2 ergibt sich dann $x(1-16\lambda^2) = 0$, d.h. einer der beiden Faktoren ist 0. Unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall 1: $x = 0$. Dann ist auch $y = 0$, sodass ein Widerspruch zur Gleichung 3 entsteht.

Fall 2: $(1 - 16\lambda^2) = 0$. Dann erhält man $\lambda^2 = \frac{1}{16}$ (d.h. $\lambda = \pm\frac{1}{4}$). Setzt man dies in die dritte Gleichung ein, erhält man $2x^2 = 2$.
Somit ergeben sich folgende möglichen Kandidaten für die lokalen Extrema:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 & y_1 &= \frac{1}{2}, \\ x_2 &= 1 & y_2 &= -\frac{1}{2}, \\ x_3 &= -1 & y_3 &= \frac{1}{2}, \\ x_4 &= -1 & y_4 &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Weiterhin ist $f(x_1, y_1) = f(x_4, y_4) = \frac{1}{2}$, $f(x_2, y_2) = f(x_3, y_3) = -\frac{1}{2}$.

Ungeklärt ist zunächst, ob dies wirklich lokale Extrema sind. Daher folgende Überlegung: Der zulässige Bereich $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + 4y^2 = 2\}$ ist eine Ellipse, also eine kompakte Teilmenge. (Anmerkung: Der zulässige Bereich ist eine Höhenline der stetigen Funktion $g(x) := x^2 + 4y^2$. Höhenlinien zu stetigen Funktionen sind stets abgeschlossen, sodass man i.a. lediglich überprüfen muss, ob die Menge beschränkt ist, um Kompaktheit zu zeigen.) Die Funktion $f$ ist stetig, sodass sie auf der kompakten Teilmenge $K$ ein globales Maximum und Minimum annehmen muss. Damit sind $(x_1, y_1)$ und $(x_4, y_4)$ die Maximalstellen, $(x_2, y_2)$ und $(x_3, y_3)$ die Minimalstellen.

**Abgabe der Hausübungen:** Am Freitag den 17. Juli 2009 vor der Übung.
(Hinweise auf Fehler bei diesen Aufgaben bitte an Michael Klotz, kl...@math...tik.tu-darmstadt.de)