Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
Dipl.-Math. Tobias Hansel
Dipl.-Math. Rene Hartmann
Dipl.-Math. Michael Klotz

Technische Universität Darmstadt

SS 2009
19.06.2009

10. Übungsblatt zur „Mathematik II für ET, WI(ET), SpoInf, IkT, IST, CE, Mechatronik“

Gruppenübung

Aufgabe G33 (Fourierreihen und Berechnung von Reihen)

Bezeichne $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, für die $f(x) = x^2$ für alle $x \in [-\pi, \pi]$ gilt.

(a) Skizzieren Sie die Fourierreihe auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$.

(b) Berechnen Sie die Fourierreihe von f.

(c) Konvergiert die Fourierreihe? Wenn ja, wie sieht die Grenzfunktion aus?

(d) Bestimmen Sie mithilfe Ihrer Ergebnisse den Wert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Lösung:

(a) (Skizze)

(b) Da f eine gerade Funktion ist, gilt $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2\,dx = \frac{2\pi^2}{3}, \\
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos(nx)\,dx \overset{\text{für } n \neq 0}{=} \frac{2}{\pi}\left(\left[x^2 \frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2x \frac{\sin(nx)}{n}\,dx\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[2x \frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2 \frac{\cos(nx)}{n^2}\,dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(2\pi \frac{\cos(n\pi)}{n^2} - \left[2 \frac{\sin(nx)}{n^3}\right]_0^\pi\right) \\
&= 4\frac{(-1)^n}{n^2}.
\end{aligned}$$

Daher lautet die Fourierreihe von f

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

(c) Da f stetig und stückweise stetig differenzierbar ist, konvergiert die Fourierreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen f.

(d) Wegen $f(0) = 0^2 = 0$, gilt also insbesondere:

$$0 = f(0) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{(-1)^n}{n^2} \cos(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Daraus folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Aufgabe G34 (Näherungsweise Gleichheit von Potenzreihen)

(a) Bestimmen Sie für die Potenzreihen $\Phi := \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-10)^k$ und $\Psi := \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(x-10)^k$ mit

$$a_k = \begin{cases} k^2 & \text{für } k < 20 \\ \sin(k) & \text{für } k \geq 20 \end{cases}$$

näherungsweise ($\approx_{10}^3$) Summe und Produkt.

(b) Bestimmen Sie näherungsweise ($\approx_{100}^2$) die Substitution von $\Phi := \sum_{k=0}^{\infty}(1+k)(x-100)^k$ in $\Psi := \sum_{k=0}^{\infty}(x-1)^k$, d. h.

$$\sum_{k=0}^{\infty}(x-1)^k \circ \sum_{k=0}^{\infty}(1+k)(x-100)^k.$$

Anmerkung: Beachten Sie, dass die Substitution nur deshalb definiert ist, weil der Wert der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty}(1+k)(x-100)^k$ für $x = 100$ (also der Koeffiezient vor der Potenz $(x-100)^0$) gerade 1 ist und daher mit dem Entwicklungspunkt der anderen Potenzreihe übereinstimmt.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}
\Phi + \Psi \quad &\approx_{10}^3 \quad \sum_{k=0}^{3} k^2(x-10)^k + \sum_{k=0}^{3}(k+2)(x-10)^k \\
&= \quad 2 + 4(x-10) + 8(x-10)^2 + 14(x-10)^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi \cdot \Psi \quad &\approx_{10}^3 \quad \sum_{k=0}^{3} k^2(x-10)^k \cdot \sum_{k=0}^{3}(k+2)(x-10)^k \\
&\approx_{10}^3 \quad (0^2 \cdot 2) + (0^2 \cdot 3 + 1^2 \cdot 2)(x-10) + (0^2 \cdot 4 + 1^2 \cdot 3 + 2^2 \cdot 2)(x-10)^2 \\
&\qquad\quad +(0^2 \cdot 5 + 1^2 \cdot 4 + 2^2 \cdot 3 + 3^2 \cdot 2)(x-10)^3 \\
&= \quad 2(x-10) + 11(x-10)^2 + 34(x-10)^3
\end{aligned}$$

(b) Wegen $\Phi \approx_{100}^2 \sum_{k=0}^{2}(1+k)(x-100)^k$ und $\Psi \approx_1^2 \sum_{k=0}^{2}(x-1)^k$ haben wir:

$$\begin{aligned}
\Psi \circ \Phi \quad &\approx_{100}^2 \quad \sum_{k=0}^{2}(x-1)^k \circ \sum_{k=0}^{2}(1+k)(x-100)^k \\
&= \quad \sum_{k=0}^{2}\Big(\big(\sum_{k=0}^{2}(1+k)(x-100)^k\big) - 1\Big)^k \;=\; \sum_{k=0}^{2}\Big(1 + 2(x-100) + 3(x-100)^2 - 1\Big)^k \\
&= \quad 1 + \big(2(x-100) + 3(x-100)^2\big) + \big(2(x-100) + 3(x-100)^2\big)^2 \\
&\approx_{100}^2 \quad 1 + 2(x-100) + 3(x-100)^2 + 4(x-100)^2 \\
&= \quad 1 + 2(x-100) + 7(x-100)^2
\end{aligned}$$

Aufgabe G35 (Taylorpolynome von verketteten Funktionen)

Gegeben sei die Funktion $f\colon]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, $f(x) := \cos(x)$ und die natürliche Logarithmusfunktion ln. Wir berechnen für die verkettete Funktion $x \mapsto \ln(f(x))$ das Taylorpolynom $j_p^n(\ln\circ f)$ vom Grad $n = 2$ am Entwicklungspunkt $p = 0$ auf zwei verschieden Weisen.

(a) Bestimmen Sie die Koeffizienten a_k in der Formel $j_p^n(\ln\circ f)(x-p) = \sum_{k=0}^n a_k(x-p)^k$ mittels der Ableitungen $a_k = \frac{1}{k!}(\ln\circ f)^{(k)}(p)$.
(Alternative Notation: $j_p^n(\ln\circ f)(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$.)

(b) Verwenden Sie die Ihnen bereits bekannten Taylorentwicklungen $j_1(\ln)$ und $j_0(f)$ und lösen Sie das Problem mittels Substitution von Potenzreihen, d. h.

$$j_p^n(\ln\circ f)(x-p) \approx_p^n \big(j_q^n(\ln)\circ(j_p^n(f)-q)\big)(x-p)$$

mit $q = f(p) = 1$.
alternative Schreibweise: $j_p^n(\ln\circ f)(t) \approx_0^n \big(j_q^n(\ln)\circ(j_p^n(f)-q)\big)(t)$

Lösung:

(a) Berechnen wir die ersten zwei Ableitungen von $\ln\circ f$:

$$\begin{aligned}(\ln\circ f)'(x) &= \frac{1}{\cos(x)}\cdot\cos'(x) = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x),\\ (\ln\circ f)''(x) &\left(= -\frac{\sin'(x)\cos(x)-\sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = -\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\right) = -\frac{1}{\cos^2(x)}.\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich

$$\begin{aligned}a_0 &= \ln(\cos(0)) = \ln(1) = 0,\\ a_1 &= -\tan(0) = 0,\\ a_2 &= -\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{\cos^2(0)} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Folglich haben wir:

$$j_0^2(\ln\circ f)(x-0) = \sum_{k=0}^{2} a_k(x-0)^k = -\frac{1}{2}x^2.$$

(b) Vgl. Skript, S. 108:

$$\begin{aligned}\ln(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n \quad \text{für } x\in\,]0,2],\\ \cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \quad \text{für } x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Die Taylorpolynome vom Grad 2 in den entsprechenden Entwicklungspunkten sind also:

$$\begin{aligned}j_1^2(\ln)(x-1) &= (x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2,\\ \text{bzw. } j_1^2(\ln)(t) &= t-\frac{1}{2}t^2,\\ j_0^2(\cos)(x) &= 1-\frac{1}{2}x^2.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} j_0^2(\ln\circ f)(x-0) &\approx_0^2 \big(j_1^2(\ln)\circ(j_0^2(f)-1)\big)(x-0) \\ &= j_1^2(\ln)(1-\frac{1}{2}x^2-1) \\ &= (-\frac{1}{2}x^2)-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x^2)^2 \;\approx_0^2\; -\frac{1}{2}x^2, \end{aligned}$$

d. h., $j_0^2(\ln\circ f)(x) = -\frac{1}{2}x^2$, denn beachten Sie dabei, dass das Polynom $j_0^2(\ln\circ f)(x)$ nach Definition Grad ≤ 2 hat, sodass wir aus

$$j_0^2(\ln\circ f)(x-0) \;\approx_0^2\; -\frac{1}{2}x^2$$

auch wirklich Gleichheit schließen können.

Aufgabe G36 (Nutzen der gleichmäßigen Konvergenz)

Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^{\pi}\frac{\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)}{1-e^{-xn}}\,dx.$$

Hinweis: Da man für $\frac{\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)}{1-e^{-xn}}$ nicht ohne weiteres eine Stammfunktion hinschreiben kann, würde man gerne Integration und Grenzwertbildung vertauschen. Dies geht aber nur, wenn gleichmäßige Konvergenz vorliegt, was zunächst nachgewiesen werden muss.

Lösung: Sei $f_n(x) = \frac{\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)}{1-e^{-xn}}$. Dann konvergiert die Funktionenfolge für $x > 0$ offensichtlich punktweise gegen Null.

Zum Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz betrachte man

$$||f_n-0||_\infty = \sup_{x\in[1,\pi]}\left|\frac{\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)}{1-e^{-xn}}-0\right| = \sup_{x\in[1,\pi]}\frac{\left|\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)\right|}{|1-e^{-xn}|}.$$

Für $n > 1$ ist die Funktion $x \mapsto \sin^2\left(\frac{x}{n}\right)$ auf dem Intervall $[1,\pi]$ monoton steigend (und offensichtlich positiv). Daher ist $\left|\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)\right|$ für $x=\pi$ maximal. Die Funktion $x\mapsto 1-e^{-xn}$ ist monoton steigend und auf dem zu betrachtenden Intervall $[1,\pi]$ außerdem positiv, sodass $|1-e^{-xn}|$ auf dem Intervall $[1,\pi]$ für $x=1$ minimal ist. Folglich gilt

$$\sup_{x\in[1,\pi]}\frac{\left|\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)\right|}{|1-e^{-xn}|} \leq \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1-e^{-n}}.$$

Daraus folgt

$$\lim_{n\to\infty}||f_n-0||_\infty = 0,$$

womit f_n gleichmäßig gegen Eins konvergiert.

Daher gilt

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^{\pi}\frac{\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)}{1-e^{-xn}}\,dx = \int_1^{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)}{1-e^{-xn}}\,dx = \int_1^{\pi}0\,dx = 0.$$

Abgabe der Hausübungen: Am Freitag den 26. Juni 2009 vor der Übung.

(Hinweise auf Fehler bei diesen Aufgaben bitte an Michael Klotz, kl...@math...tik.tu-darmstadt.de)