6. Übung Mathematik II für ET, 22.5.2009

(G17) Ebenen im Raum. Bestimmen Sie die affine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ so, dass $\{A, B, C\} \subseteq \{(x, y, z) \mid z = f(x, y)\}$ für $A = (-1, 2, 2), B = (-2, 0, -2), B = (3, 2, 0)$.

Lösung: Ansatz $z = ax + by + c$ und $A, B.C$ einsetzen ergibt LGS für a, b, c

$$-a + 2b + c = 2,\ -2a + c = -2,\ 3a + 2b + c = 0$$

$$a = -\frac{1}{2}, c = -3,\ b = \frac{9}{4}$$

(G18) Matrizenkalkül. Gegeben seien die Matrizen A, B, C. Welche dieser Matrizen kann man miteinander multiplizieren? Berechnen Sie $A(BC)$ und $(AB)C$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es sind $AC = \begin{pmatrix} 10 & -2 & 3 & 7 \\ 10 & -6 & 8 & 19 \end{pmatrix}$,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad BC = \begin{pmatrix} 10 & -2 & 3 & 7 \\ -4 & 26 & 5 & 10 \\ -4 & -1 & -12 & -28 \end{pmatrix}, \quad ABC = \begin{pmatrix} 2 & 50 & 13 & 27 \\ 30 & 21 & 26 & 59 \end{pmatrix}.$$

(G 19) Koordinatentransformation für Vektoren. Bezüglich einer Basis α des Raumes (Sie dürfen die Basisvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ nennne, gebraucht wirds nicht) sei die Basis $\beta : \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ gegeben durch

$$\vec{b}_1^\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2^\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_3^\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix ${}^\alpha T_\beta$ mit $\vec{x}^\alpha = {}^\alpha T_\beta \vec{x}^\beta$. Was steht in ihren Spalten?

b) Stellen Sie die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ mit $\vec{v}_1^\beta = (1, 0, 0)^t, \vec{v}_2^\beta = (2, 1, 2)^t$ bezüglich α dar, das heißt bestimmen Sie $\vec{v}_1^\alpha, \vec{v}_2^\alpha$.

Lösung

a) In Spalte j von ${}^\alpha T_\beta$ steht $\vec{b}_j^\alpha$:

$${}^\alpha T_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Es gilt $\vec{v}_j^\alpha = {}^\alpha T_\beta \vec{v}_j^\beta$, also

$$\vec{v}_1^\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2^\alpha = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(G20=H19) Spiegelung in der Ebene. (4 Punkte) In der Ebene seien ein Ursprung O und eine Orthonormalbasis α gegeben. Die Gerade g gehe durch O und habe den Richtungsvektor $\vec{v}$ mit Koordinaten $\vec{v}^\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{3},-1)^t$. Bestimmen Sie die Matrix A der Spiegelung σ (aufgefasst als lineare Abbildung) an g bezüglich der Basis α. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

1. Machen Sie eine Skizze
2. Ermitteln Sie zunächst eine Orthonormalbasis $\beta : \vec{b}_1, \vec{b}_2$, bezüglich derer Sie die Matrix B von σ sofort angeben können
3. Geben Sie die Transformationsmatrizen ${}^\alpha T_\beta$ und ${}^\beta T_\alpha$ an.
4. Wie kann man A ein geeignetes Produkt der Matrizen aus 2 und 3 schreiben? Warum? Berechnen Sie A und überprüfen Sie Ihr Ergebnis anhand der Skizze
5. $\sigma(\vec{x})$ kann man mittels Vektorrechnung direkt ausdrücken. Wie? Wie kommt man dann auf A? Vergleichen Sie die Ergebnisse.

Lösunng

1. selbermachen
2. Bis auf Vorzeichen $\vec{b}_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{3},-1)^t, \vec{b}_2 = \frac{1}{2}(1,\sqrt{3})^t$.
3. ${}^\alpha T_\beta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = ({}^\beta T_\alpha)^t$.
4. Es ist $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
5. $A = {}^\alpha T_\beta B {}^\beta T_\alpha$ α-Koordinaten von $\vec{x}$ werden durch ${}^\beta T_\alpha$ in β Koordinaten von $\vec{x}$ ungerechnet, Anwendung von B ergibt β-Koordinaten von $\sigma(\vec{x})$, die werden durch ${}^\alpha T_\beta$ in α-Koordinaten von $\sigma(\vec{x})$ umgerechnet.
$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$
6. Mit Normalenvektor $\vec{n}$ der Geraden gilt
$$\sigma(\vec{x}) = \vec{x} - 2\langle \vec{x} | \vec{n} \rangle \vec{n}$$
Mit $\alpha : \vec{e}_1, \vec{e}_2$ erhält man die Koordinaten von $\sigma(\vec{e}_1)$ und $\sigma(\vec{e}_2)$ bzgl. α, also die Spalten von A
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\frac{1}{2}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

(G21) Determinante und Stufenform.

a) Beweisen Sie mittels der Regeln (D1-4) aus Kap.8 und Scherungsinvarianz

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} \quad \text{für } A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

b) Sei α eine Orthonormalbasis des Raumes. Bestimmen Sie $\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ für die Vektoren mit Koordinaten $\vec{a}_1^\alpha = (1,1,1)^t$, $\vec{a}_2^\alpha = (-1,0,1)^t$, $\vec{a}_3^\alpha = (-1,1,1)^t$ unter Verwendung von a)

a) Ist $a_{33} = 0$ so $\det(A) = 0$ nach (D2). Sei also $a_{33} \neq 0$. Durch Subtraktion geeigneter Vielfacher der dritten Spalte von den ersten beiden, ohne Änderung der Determinanten o.B.d.A. $a_{31} = a_{32} = 0$. Ist nun $a_{22} = 0$, so $\det(A) = 0$ nach (D2). Sei also $a_{22} \neq 0$. Nun wie eben o.B.d.A. $a_{21} = 0$ und es folgt $]det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}$ durch dreimal (D2) Anwenden.

b) Wenn man die Spalten als Zeilen schreibt, sieht es so aus: Es ist (links des Doppelstrichs die Zeilentransformationsmatrix)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Es wurden also nur Spalten-Scherungen benutzt (aber als Zeilen geschrieben), also Determinante unverändert. Schreiben wir die Spalten wieder richtig als Spalten, so folgt mit a) $\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = -2$.

H (18) Determinante, Bild & Kern (3 Punkte). Sie haben eine lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ vorliegen, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 18 & 27 & 27 \\ 15 & 25 & 24 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{Bild}\phi$ und von $\operatorname{Kern}\phi$. Welche Beziehung gilt zwischen den Dimensionen der beiden? Welcher Zusammenhang besteht zu linearen Gleichungssystemen?

b) Bestimmen Sie $\det(A)$

Lösung

a) Zeilenstufenform (letzte Matrix 1. Zeile):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 7 & 6 \\ -6 & 1 & 0 & 18 & 27 & 27 \\ -5 & 0 & 1 & 15 & 25 & 24 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -15 & -9 \\ 0 & -2/3 & 1 & 0 & -10 & -6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -15 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 7/15 & 0 & 3 & 7 & 6 \\ 0 & -1/15 & 0 & 0 & -15 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 9/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der letzten Matrix leicht abzulesen: $\operatorname{Kern}\phi = \mathsf{Spann}\{(-3,-3,5)\}$. Der Kern ist Lösungsraum des durch A gegebenen homgenene LGS, das Bild der Spann von A und er gilt $\dim \mathsf{Kern}(\phi) + \dim \mathsf{Bild}(\phi) = 3$. Die ersten beiden Spalten von A sind offenbar linear unabhängig, also Basis von $\mathsf{Bild}(\phi)$ da das Dimension 2 hat.

b) A hat Determinante 0.

(H 20) Transformation der Beschreibung linearer Abbildungen (2+2 Punkte). Die Basen α und β des Raumes seien wie in **G19** gegeben.

a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen ${}^{\beta}T_{\alpha}$ und ${}^{\alpha}T_{\beta}$? Berechnen Sie über diesen ${}^{\beta}T_{\alpha}$.

b) Die lineare Abbildung ϕ des Raumes in sich sei bezüglich α durch folgende Matrix gegeben

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Matrix B von ϕ bezüglich der Basis β. Begründen Sie Ihre Vorgehensweise. Welche Rolle spielt hier ${}^{\alpha}T_{\beta}\vec{x}^{\beta}$?

Lösung

a) Es gilt ${}^{\alpha}T_{\beta}{}^{\beta}T_{\alpha} = E$, also ${}^{\beta}T_{\alpha} = ({}^{\alpha}T_{\beta})^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{II+I \\ III+I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{I-II \\ III-2II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{I-\frac{1}{2}III \\ II+III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \overset{-\frac{1}{2}III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Folglich ist

$${}^{\beta}T_{\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

b) Hier gilt

$$\begin{aligned} B &= {}^{\beta}T_{\alpha}A{}^{\alpha}T_{\beta} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir sollen zeigen: $\phi(\vec{x})^{\beta} = B\vec{x}^{\beta}$, Dazu werden folgende Gleichungen der Reihe nach von rechts nach links benutzt

- $\vec{x}^{\alpha} = {}^{\alpha}T_{\beta}\vec{x}^{\beta}$
- $\phi(\vec{x})^{\alpha} = A\vec{x}^{\alpha}$
- $\phi(\vec{x})^{\beta} = {}^{\beta}T_{\alpha}\phi(\vec{x})^{\alpha}$

(H 21) Orthogonalisierung (1+1+1+1 Punkte). Im Raum seien Usprung O und Orthonormalbasis α gegeben. Die Vektoren $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_2$ haben die Koordinaten

$$\vec{u}_1^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2^{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{u}_3^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Welche der Vektoren $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ und $\vec{u}_3$ sind zueinander orthogonal? Bestimmen Sie die Längen!

b) Bestimmen Sie den Fußpunkt des Lotes von $\vec{u}_3 + O$ auf die Ebene durch O mit Richtungsvektoren $\vec{u}_1, \vec{u}_2$

c) Geben Sie eine Orthonormalbasis $\beta : \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ des Raumes so an, dass $\mathsf{Spann}\{\vec{v}_i\} = \mathsf{Spann}\{\vec{u}_i\}$ für $i = 1, 2$.

d) Geben Sie die Transformationsmatrizen ${}^{\alpha}T_{\beta}$ und ${}^{\beta}T_{\alpha}$ an. Bestimmen Sie $\vec{u}_3^{\beta}$.

Lösung

a) Mit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ ist $M^t M = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Also sind $\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$ orthogonal zueinander, die restlichen Paare nicht. Als Längen erhält man $\|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\| = 3$ und $\|\vec{u}_3\| = \sqrt{3}$.

b) Seien $\vec{v}_1 = \frac{1}{3}u_1, \vec{v}_2 = \frac{1}{3}u_2$. Dann hat der Fusspunkt $\vec{p} + O$ des Lotes die Koordinaten

$$\vec{p}^{\alpha} = \langle \vec{v}_1 \mid \vec{u}_3 \rangle \vec{v}_1 + \langle \vec{v}_2 \mid \vec{u}_3 \rangle \vec{v}_2 = \frac{1}{9}(-1, 1, 4)^t$$

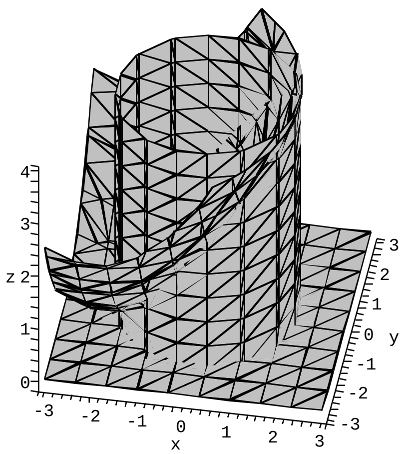
.

c) $\vec{v}_3 = \vec{u} - \vec{p}$ somit $\vec{v}_3^{\alpha} = \frac{1}{3}(2, -2, 1)^t$.

d) Es ist ${}^{\alpha}T_{\beta} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = ({}^{\beta}T_{\alpha})^t$. Nun $\vec{u}_3^{\beta} = {}^{\beta}T_{\alpha}\vec{u}_3^{\alpha} = \frac{1}{3}(1, -1, 5)^t$

■

(H22) Fubini & Normalbereiche im Dreidimensionalen (5 Punkte). Bestimme das Volumen, welches innerhalb des Zylinders $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4\}$, über der Ebene $z = 0$ und unterhalb des durch die Gleichung $(x + 2)^2 + y^2 = 4z$ gegebenen Paraboloids liegt. Sie haben **freie Wahl** zwischen den zwei Möglichkeiten: a) Verwenden Sie kartesische Koordinaten und Normalbereiche beim Integrieren. b) Verwenden Sie Zylinderkoordinaten.



Lösung In kartesischen Koordinaten sieht das ganze wie folgt aus: wir belassen x als freie Variable aus $[-2, 2]$. Dann ist y von x abhängig, damit ein Kreis herauskommt: $-\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$. Die Höhe des Körpers können wir direkt aus der Aufgabenstellung ablesen:

$0 \le z \le \frac{1}{4}(x+2)^2 + \frac{1}{4}y^2$. Den jetzt auftretenden Integralen ist allerdings nur mit etwas Erfahrung beizukommen:

$$V = \iiint\limits_T 1 \text{ d}x \text{ d}y \text{ d}z = 2 \cdot \int\limits_{-2}^{2} \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \int\limits_{0}^{\frac{1}{4}(x+2)^2+\frac{1}{4}y^2} 1 \text{ d}z \text{ d}y \text{ d}x$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{-2}^{2} \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \left((x+2)^2 + y^2\right) \text{d}y \text{ d}x = \frac{1}{2} \int\limits_{-2}^{2} \left[y(x+2)^2 + \frac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^{y=\sqrt{4-x^2}} \text{d}x$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{-2}^{2} (x+2)^2 \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}} \text{d}x$$

$$= \left[-\frac{1}{12}x(4-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}x\sqrt{4-x^2} + 6 \arcsin\frac{x}{2} - \frac{2}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{x=-2}^{x=2} = 6\pi.$$

In Zylinderkoordinaten ist ein wenig Vorarbeit zu leisten, dafür wird's beim Integrieren hübsch einfach. An dem Zylinder ist nichts mehr zu tun (klar, bei *Zylinder*koordinaten). Nur die Höhe muß ein wenig umgeformt werden:

$$(x+2)^2 + y^2 = 4z \quad \Leftrightarrow \quad (r\cos\varphi + 2)^2 + r^2\sin^2\varphi = 4t$$
$$\Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{4}r^2 + r\cos\varphi + 1.$$

Damit rechnen wir dann wie folgt (Hinweis, insbesondere für Klausuren: Transformationsfaktor r beim Übergang auf Zylinderkoordinaten wird gerne vergessen!):

$$V = \iiint\limits_T 1 \text{ d}x \text{ d}y \text{ d}z = \int\limits_0^2 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\frac{1}{4}r^2+r\cos\varphi+1} r \text{ d}t \text{ d}\varphi \text{ d}r$$

$$= \int\limits_0^2 \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4}r^2 + r\cos\varphi + 1\right) r \text{ d}\varphi \text{ d}r = \int\limits_0^2 \left[\frac{1}{4}r^3\varphi + r^2\sin\varphi + r\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \text{d}r$$

$$= \int\limits_0^2 \left(\frac{\pi}{2}r^3 + 2r\pi\right) \text{ d}r = \left[\frac{\pi}{8}r^4 + \pi r^2\right]_{r=0}^{r=2} = 6\pi,$$

´ das gleiche Resultat, allerdings mit wesentlich weniger Schmerzen erhalten.