Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
Dipl.-Math. Tobias Hansel
Dipl.-Math. Rene Hartmann
Dipl.-Math. Michael Klotz

**Technische Universität Darmstadt**

SS 2009
12.06.2009

# 9. Übungsblatt zur „Mathematik II für ET, WI(ET), SpoInf, IkT, IST, CE, Mechatronik“

## Gruppenübung

**Aufgabe G30** (Konvergenz von Funktionenfolgen und -reihen)
Sei $(f_n)$ eine Funktionenfolge von reellen Funktionen $f_n\colon \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ und sei $f$ eine weitere reelle Funktion auf $D$. Kreuzen Sie alle allgemeingültigen Aussagen an.

- ☒ Wenn $(f_n)$ gleichmäßig gegen $f$ konvergiert, dann konvergiert $(f_n)$ punktweise gegen $f$.
- ☐ Wenn $(f_n)$ punktweise gegen $f$ konvergiert, dann konvergiert $(f_n)$ gleichmäßig gegen $f$.
- ☒ Wenn $(f_n)$ gleichmäßig gegen $f$ konvergiert, dann ist $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_\infty = 0$.
- ☒ Wenn $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_\infty = 0$ gilt, dann konvergiert $(f_n)$ gleichmäßig gegen $f$.
- ☒ Wenn die Zahlenreihe $\sum_{n=1}^\infty ||f_n||_\infty$ konvergiert, dann kovergiert die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^\infty f_n$ punktweise.
- ☒ Wenn die Zahlenreihe $\sum_{n=1}^\infty ||f_n||_\infty$ konvergiert, dann kovergiert die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^\infty f_n$ gleichmäßig.
- ☐ Wenn die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^\infty f_n$ punktweise konvergiert, dann konvergiert die Zahlenreihe $\sum_{n=1}^\infty ||f_n||_\infty$.
- ☐ Wenn die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^\infty f_n$ gleichmäßig konvergiert, dann konvergiert die Zahlenreihe $\sum_{n=1}^\infty ||f_n||_\infty$.

**Fourierreihen:** Für eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Periode $T > 0$ lautet die zugehörige Fourierreihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(\frac{2\pi}{T}nx) + b_n \sin(\frac{2\pi}{T}nx))$$

mit den Koeffizienten

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(\frac{2\pi}{T}nx)\,dx,\ n \in \mathbb{N}_0,$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(\frac{2\pi}{T}nx)\,dx,\ n \in \mathbb{N}.$$

Falls die Funktion gerade ist, d. h. $f(x) = f(-x)$ für $x \in \mathbb{R}$, dann ist

$$a_n = 2 \cdot \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos(\frac{2\pi}{T} nx)\, dx$$

und $b_n = 0$. Falls die Funktion ungerade ist, d. h. $f(x) = -f(-x)$ für $x \in \mathbb{R}$, dann ist

$$b_n = 2 \cdot \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin(\frac{2\pi}{T} nx)\, dx$$

und $a_n = 0$.

Ist die Funktion $f$ stückweise stetig differenzierbar, so konvergiert die Fourierreihe für jedes $x$. An allen Stetigkeitsstellen $x$ von $f$ stimmt der Grenzwert mit $f(x)$ überein. An allen Sprungstellen $x$ konvergiert die Reihe gegen $\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}$.

**Aufgabe G31** (Fourierreihen)

(a) Bestimmen Sie die Fourierreihen der $2\pi$-periodischen Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |\sin x|$$

und

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \pi - e^2 \frac{\cos(3x)}{2}.$$

Konvergieren die Fourierreihen? Stimmen sie mit der jeweiligen Funktion überein?

(b) Sei $a \in \mathbb{R}$ und gelte $0 < a < 1$. Bezeichne $f_a$ die 1-periodische Funktion, für die gilt

$$f_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \le x \le a \\ 0 & \text{falls } a < x < 1 \end{cases}$$

Skizzieren Sie die Funktion $f_a$ für $a = 0.25$ auf dem Intervall $[-1, 2]$. Bestimmen Sie dann die Fourierreihe von $f_a$ (für allgemeines $a$). Konvergiert die Reihe? Bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzfunktion und überprüfen Sie, ob diese mit $f_a$ übereinstimmt.

*Tipp:* Es gilt

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)).$$

**Lösung:**

(a) Da $f$ eine gerade Funktion ist, gilt $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}(\sin(x-nx)+\sin(x+nx))\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x(1-n))+\sin(x(1+n))\,dx \\
&\overset{\text{für } n\neq 1}{=} \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(x(1-n))}{1-n}+\frac{-\cos(x(1+n))}{1+n}\right]_0^\pi \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-(-1)^{(1-n)}}{1-n}+\frac{-(-1)^{1+n}}{1+n}-\frac{-1}{1-n}-\frac{-1}{1+n}\right) \quad \text{wobei } \cos(k\pi) = (-1)^k \text{ für } k \in \mathbb{Z} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{1-n}+\frac{(-1)^n}{1+n}-\frac{-1}{1-n}-\frac{-1}{1+n}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left((-1)^n\frac{2}{1-n^2}+\frac{2}{1-n^2}\right) \\
&= \begin{cases} \frac{4}{\pi(1-n^2)} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}
\end{aligned}$$

für $n \neq 1$. Für den Koeffizienten $a_1$ gilt

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x(1-1))+\sin(x(1+1))\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(2x)\,dx = 0.$$

Daher lautet die Fourierreihe von $f$

$$\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{1-(2n)^2}.$$

Da $f$ stetig und stückweise stetig differenzierbar ist, konvergiert die Fourierreihe und stimmt mit $f$ überein.

Die Funktion $g$ ist bereits selbst eine (abbrechende/endliche) Fourierreihe, sodass die Koeffizienten (ohne Rechnung) abgelesen werden können. Die Summe der Fourierreihe von $g$ stimmt also mit $g$ überein. Die Koeffizienten sind alle Null außer $a_0 = 2\pi$ und $a_3 = \frac{-e^2}{2}$.

(b) Für die Koeffizienten der Fourierreihe gilt

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{1}\int_0^1 f_a(x)\cos(0)\,dx = 2\int_0^a 1\,dx = 2a, \\
a_n &= \frac{2}{1}\int_0^1 f_a(x)\cos(2\pi nx)\,dx = 2\int_0^a \cos(2\pi nx)\,dx = 2\left[\frac{\sin(2\pi nx)}{2\pi n}\right]_0^a \\
&= \frac{\sin(2\pi na)}{\pi n}, \\
b_n &= \frac{2}{1}\int_0^1 f_a(x)\sin(2\pi nx)\,dx = 2\int_0^a \sin(2\pi nx)\,dx = 2\left[-\frac{\cos(2\pi nx)}{2\pi n}\right]_0^a \\
&= \frac{1-\cos(2\pi na)}{\pi n}.
\end{aligned}$$

Daher lautet die Fourierreihe von $f_a$

$$a+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2\pi na)}{\pi n}\cos(2\pi nx)+\frac{1-\cos(2\pi na)}{\pi n}\sin(2\pi nx).$$

Da die Funktion $f_a$ stückweise stetig differenzierbar ist, konvergiert ihre Fourierreihe. An allen Stetigkeitsstellen von $f_a$ stimmt die Grenzfunktion mit $f_a$ überein. An allen Sprungstellen $x$ konvergiert sie gegen $\frac{f_a(x_+)+f_a(x_-)}{2}$. Die Sprungstellen sind durch alle $x = 0+k$ und $x = a+k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ gegeben. An jeder dieser Stellen $x$ ist

$$\frac{f_a(x_+) + f_a(x_-)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Die Fourierreihe von $f_a$ konvergiert also gegen die 1-periodische Funktion $\tilde{f}_a$, für die

$$\tilde{f}_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{falls } x = 0 \text{ oder } x = a \\ 1 & \text{falls } 0 < x < a \\ 0 & \text{falls } a < x < 1 \end{cases}$$

gilt.

Daher unterscheiden sich an den Stellen $x = 0 + k$ und $x = a + k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ die Fourierreihe und die Funktion $f_a$.

**Aufgabe G32** (Quotienten von Potenzreihen)

Entwickeln Sie die Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x) := \frac{x}{x^4+1}$$

in eine Potenzreihe mit dem Entwicklungspunkt 0 und bestimmen Sie deren Konvergenzradius.
*Tipp:* Fassen Sie $x$ und $x^4+1$ als Potenzreihen auf und benutzen Sie Satz 25.17 über den Quotienten von Potenzreihen.

**Lösung:** Die Funktion $f(x) = x$ läßt sich als Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit den Koeffizienten $a_1 = 1$ und $a_n = 0$ für $n \neq 1$ auffassen und $g(x) = x^4 + 1$ als Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ mit den Koeffizienten $b_0 = 1$, $b_1 = 0$, $b_2 = 0$, $b_3 = 0$, $b_4 = 1$ und $b_n = 0$ für $n > 4$.
Da $b_0 \neq 0$ ist, läßt sich nach Satz 25.17 $\frac{f}{g}$ in eine Potenzreihe um 0 mit positiven Konvergenzradius entwickeln. Bezeichnen $c_n$ die Koeffizienten dieser Reihe, dann gilt

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

bzw.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right).$$

Aufgrund des Koeffizientenvergleichs und des Cauchyprodukts ist

$$a_n = b_n c_0 + \ldots + b_0 c_n.$$

Da $b_0 = 1$ gilt, folgt

$$c_n = a_n - b_n c_0 - \ldots - b_1 c_{n-1}.$$

Daher gilt für $n = 0$

$$c_0 = a_0 = 0,$$

für $n = 1$

$$c_1 = a_1 - b_1 c_0 = 1,$$

für $n = 2$

$$c_2 = a_2 - b_2 c_0 - b_1 c_1 = 0,$$

für $n = 3$

$$c_3 = a_3 - b_3c_0 - b_2c_1 - b_1c_2 = 0$$

und für $n > 3$

$$c_n = -b_4c_{n-4} = -c_{n-4}.$$

Wegen $c_1 = 1$ gilt also $c_5 = -1$, $c_9 = 1$, $c_{13} = -1$, $c_{17} = 1$ usw., alle anderen Koeffizienten sind 0. Das heißt also:

$$c_n = \begin{cases} (-1)^k & \text{falls } n = 4k+1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daraus folgt, daß sich $\frac{x}{x^4+1}$ durch die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n+1}$$

darstellen läßt.
Obwohl die Potenzreihen von $f$ und $g$ beide auf ganz $\mathbb{R}$ konvergieren, ist der Konvergenzradius der Potenzreihe von $\frac{f}{g}$ nur 1, wie wir wie folgt sehen: Es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} c_n = 1,$$

sodass der Konvergenzradius nach dem Wurzelkriterium (Satz 25.10) durch $(\limsup_{n\to\infty} c_n)^{-1} = 1$ gegeben ist.
(Alternativ: Die Reihe lässt sich umschreiben zu einer geometrischen Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n+1} = x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x^4)^n = x\sum_{n=0}^{\infty}(-x^4)^n,$$

die für $|-x^4| < 1$, also für $|x| < 1$ konvergiert.)

# Hausübung

**Aufgabe H28** (Fourierreihen) (2+6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Fourierreihe der $2\pi$-periodischen Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin(x)\cos(x).$$

Stimmen Fourierreihe und Funktion überein?

(b) Wir betrachten die 4-periodische Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = x\sin(\frac{2\pi}{4}x) \quad \text{falls } -2 \leq x < 2.$$

Bestimmen Sie ihre Fourriereihe. Konvergiert die Reihe? Bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Grenzfunktion. (Beachten Sie auch den Tipp aus der Gruppenübung.)
*Warnung:* Beachten Sie, dass die angegebene Formel nur auf dem Intervall [-2,2[ gültig ist. Die periodische Fortsetzung lässt sich nicht direkt durch diese Formel beschreiben. Tipp: Wenn Sie darüber nachdenken, ob die Funktion vielleicht zufällig gerade oder ungerade ist, können Sie geschickter vorgehen.

**Lösung:**

(a) Es gilt $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$. Folglich sind alle Koeffizienten der Fourierreihe von $f$ Null außer $b_2 = \frac{1}{2}$.
Offensichtlich stimmt die Fourierreihe mit der Funktion $f$ überein.

(b) Wir berechnen die Koeffizienten der Fourierreihe: Da die Funktion $g$ gerade ist, sind alle Koefizienten $b_n$ gleich 0. Wir haben

$$a_n = \frac{2}{4}\int_0^4 g(x)\cos(\frac{2\pi}{4}nx)\,dx,$$

bzw. – da $g$ gerade ist – auch einfacher:

$$\begin{aligned}
a_n &= 2\cdot\frac{2}{4}\int_0^2 g(x)\cos(\frac{2\pi}{4}nx)\,dx = \int_0^2 x\sin(\frac{2\pi}{4}x)\cos(\frac{2\pi}{4}nx)\,dx \\
&= \int_0^2 \frac{1}{2}x(\sin(\frac{2\pi}{4}x(1-n)) + \sin(\frac{2\pi}{4}x(1+n)))\,dx \\
&= \int_0^2 \frac{1}{2}x\sin(\frac{2\pi}{4}x(1-n)) + \int_0^2 \frac{1}{2}x\sin(\frac{2\pi}{4}x(1+n))\,dx.
\end{aligned}$$

Wir berechnen zunächst das Integral $\int_0^2 \frac{1}{2}x\sin(\frac{2\pi}{4}x(1-n))\,dx$ mittels partieller Integration:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{1}{2}x\sin(\frac{2\pi}{4}x(1-n))\,dx &= \left[-\frac{1}{2}x\frac{\cos(\frac{2\pi}{4}x(1-n))}{\frac{2\pi}{4}(1-n)}\right]_0^2 - \int_0^2 -\frac{1}{2}\frac{\cos(\frac{2\pi}{4}x(1-n))}{\frac{2\pi}{4}(1-n)}\,dx \\
&= -\frac{\cos(\pi(1-n))}{\frac{2\pi}{4}(1-n)} + \left[\frac{1}{2}\frac{\sin(\frac{2\pi}{4}x(1-n))}{(\frac{2\pi}{4}(1-n))^2}\right]_0^2,
\end{aligned}$$

für $n \neq 1$ (d. h., $a_1$ ist separat auszurechnen). Der Ausdruck $\cos(\pi(1-n))$ ist gleich 1 für ungerades $n$ und ist gleich $(-1)$ für gerades $n$. Der zweite Summand verschwindet ganz, sodass wir

$$\int_0^2 \frac{1}{2}x\sin(\frac{2\pi}{4}x(1-n))\,dx = \begin{cases} -\frac{2}{\pi(1-n)} & \text{für ungerades } n \\ \frac{2}{\pi(1-n)} & \text{für gerades } n \end{cases} = (-1)^n\frac{2}{\pi(1-n)}$$

erhalten. Im zweiten Integral $\int_0^2 \frac{1}{2}x\sin(\frac{2\pi}{4}x(1+n))\,dx$ tritt $(1+n)$ anstelle von $(1-n)$ auf. Da diese beiden Zahlen (unabhängig von $n$) stets die gleiche Parität haben (d. h., dass beide gerade oder beide ungerade sind), ergibt sich ganz analog

$$\int_0^2 \frac{1}{2}x\sin(\frac{2\pi}{4}x(1+n))\,dx = (-1)^n\frac{2}{\pi(1+n)}$$

und daher

$$\begin{aligned}
a_n &= (-1)^n\frac{2}{\pi(1-n)} + (-1)^n\frac{2}{\pi(1+n)} \\
&= (-1)^n\frac{2}{\pi}\left(\frac{1+n}{(1-n)(1+n)} + \frac{1-n}{(1-n)(1+n)}\right) = (-1)^n\frac{4}{\pi(1-n^2)}.
\end{aligned}$$

(Insbesondere ist $a_0 = \frac{4}{\pi}$.) Berechnen wir noch $a_1$:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \int_0^2 x\sin(\frac{2\pi}{4}x)\cos(\frac{2\pi}{4}x)\,dx = \int_0^2 \frac{1}{2}x\sin(2\cdot\frac{2\pi}{4}x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 x\sin(\pi x)\,dx = \frac{1}{2}\left[-x\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\right]_0^2 - \frac{1}{2}\int_0^2 -\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\,dx \\
&= -\frac{\cos(2\pi)}{\pi} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\right]_0^2 = -\frac{1}{\pi} - 0 = -\frac{1}{\pi}
\end{aligned}$$

Folglich ist die Fourierreihe durch

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(\frac{2\pi}{4}nx) + b_n \sin(\frac{2\pi}{4}nx)) = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{\pi}\cos(\frac{2\pi}{4}x) + \sum_{n=2}^{\infty}((-1)^n \frac{4}{\pi(1-n^2)}\cos(nx))$$

gegeben.

*Konvergenzfrage:* Offensichtlich ist die Funktion $g$ stückweise glatt. Wegen

$$(-2)\sin(\frac{2\pi}{4}\cdot(-2)) = 0 = 2\sin(\frac{2\pi}{4}\cdot 2)$$

ist sie auch stetig. Daher konvergiert die Fourierreihe von $g$ gegen $g$.

**Aufgabe H29** (Potenzreihen und Differentiation) (1+2+2 Punkte)

Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

mit $a_0 = 2009$ und $a_n = \frac{1}{n}$ für alle $n > 0$.

(a) Ermitteln Sie den Konvergenzradius $\rho$.

(b) Sei $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für $x \in ]-\rho,\rho[$. Bestimmen Sie jeweils eine Potenzreihe für die Ableitungen $f'$ und $f''$. Was wissen Sie über den Konvergenzradius der abgeleiteten Potenzreihen?

(c) Bestimmen Sie eine explizite Funktionsvorschrift für die Ableitungsfunktion $f'$ (d.h., bestimmen Sie die Summe der Reihe). Bestimmen Sie mit ihrer Hilfe dann auch die Summen der Reihen von $f$ und $f''$.

**Lösung:**

(a) Wir haben

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1,$$

weshalb sich mit dem *Wurzelkriterium* der *Konvergenzradius*

$$\rho = (\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|})^{-1} = 1$$

ergibt.

(b) Nach Satz 25.13 ergeben sich die Potenzreihen durch formales Ableiten und die Konvergenzradien sind wieder $\rho = 1$. Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ haben wir also:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ f''(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \end{aligned}$$

(c) Die Reihe $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ist eine *geometrische Reihe* mit Summe $f'(x) = \frac{1}{1-x}$. Damit ist

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = f''(x) = \frac{-\frac{d}{dx}(1-x)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

und

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \;=\; f(x) \;&=\; f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt \;=\; a_0 + \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt \\ &=\; 2009 - \int_0^x \frac{\frac{d}{dt}(1-t)}{1-t}\,dt \;=\; 2009 - \big[\ln|1-t|\big]_0^x \\ &=\; 2009 - \ln|1-x| \overset{x\in]-1,1[}{=} 2009 - \ln(1-x)\end{aligned}$$

**Aufgabe H30** (Potenzreihen und Integration) (3 Punkte)

Nehmen Sie an, dass es eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (mit $a_0 = 1$ und) mit positiven Konvergenzradius $\rho$ gibt, für die die entsprechende Funktion $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $x \in ]-\rho, \rho[$ die Eigenschaft

$$\int_0^x f(t)\,dt = f(x) - a_0 \quad \text{für alle } x \in ]-\rho,\rho[$$

hat. Bestimmen Sie die Koeffizienten der Potenzreihe, indem Sie diese gliedweise integrieren und einen Koeffizientenvergleich durchführen. Was ist das für eine Reihe und warum ist dieses Ergebnis nicht verwunderlich?

**Lösung:** Gliedweises Integrieren ergibt:

$$\int_0^x f(t)\,dt \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_{n-1} x^n.$$

Die geforderte Eigenschaft von $f$ bedeutet also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_{n-1} x^n \overset{!}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n,$$

woraus sich durch Koeffizientenvergleich die Bedingung

$$a_n = \frac{1}{n} a_{n-1}$$

für alle $n \geq 1$ ergibt. Durch diese rekursive Beschreibung der Koeffizienten lässt sich schnell einsehen, dass $a_n = \frac{1}{n!} a_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Die Potenzreihe ist also durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a_0 x^n$$

gegeben, d.h.,

$$f(x) \;=\; a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \;=\; a_0 e^x \;(=\; e^x).$$

(Der Konvergenzradius ist also $\rho = \infty$.) Das Ergebnis ist nicht verwunderlich, da wir die Exponentialfunktion gerade als die Funktion kennengelernt haben, die mit ihrer Ableitung übereinstimmt. (Aus $f(x) = f'(x)$ folgt $\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x f'(t)\,dt = f(x) - f(0)$.)

**Abgabe der Hausübungen:** Am Freitag den 19. Juni 2009 vor der Übung.
(Korrekturen zu diesem Übungsblatt bitte an Michael Klotz, kl...@math...tik.tu-darmstadt.de)