Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
Tobias Hansel
René Hartmann
Michael Klotz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 09 5.6.2009

Mathematik II für ET, WI(ET), SpoInf, IST, BEd.ET, CE

8. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 26) (Punkweise und gleichmäßige Konvergenz)

Untersuche die folgenden Funktionenfolgen bzw. -reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

(a) $f_n = \sqrt[n]{n^2x^3}, \quad x \in [0,5]$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3+x^3}, \quad x \in [0,1]$; (c) $g_n = \sin\frac{x}{n}, \quad x \in \mathbb{R}$.

LÖSUNG: (a) Für $x \in (0,5]$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2x^3} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^2 \cdot \sqrt[n]{x}^3 = (\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n})^2 \cdot (\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x})^3 = 1 \cdot 1 = 1$$

Für $x = 0$ ist

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 \cdot x^3} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{0} = 0$$

Also ist (f_n) punktweise konvergent auf [0,5] mit der Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x \in (0,5] \end{cases}.$$

Da f nicht stetig ist, aber f_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ stetig auf [0,5] ist, kann (f_n) auf [0,5] nicht gleichmäßig konvergieren.

(b) Für alle $x \in [0,1]$ gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{nx^2}{n^3+x^3} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3+x^3} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, konvergiert die Funktionenreihe gleichmäßig auf [0,1] nach Satz 25.2. Damit konvergiert sie insbesondere auch punktweise.

(c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$ und da die Sinus-Funktion stetig ist, folgt

$$\lim_{n\to\infty} \sin(\frac{x}{n}) = \sin(0) = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also konvergiert (g_n) punktweise gegen die Nullfunktion. Die Konvergenz ist aber nicht gleichmäßig, denn:
Setzen wir $x_n = \frac{n\pi}{2}$, dann gilt $g_n(x_n) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ for all $n \in \mathbb{N}$. Also folgt

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n(x) - g(x)\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \|g_n(x)\|_\infty \geq \lim_{n\to\infty} 1 = 1 > 0$$

Damit kann $(g_n)_n$ nicht gleichmäßig konvergieren.

(G 27) (Potenzreihen)

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der nachfolgenden Potenzreihen:

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^7 x^n}{2n!}, \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n} \qquad \text{und} \qquad \text{(iii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4nx)^n}{2n^3}.$$

Wie sieht bei der zweiten Reihe das Konvergenzverhalten auf dem Rand des Konvergenzintervalls aus? Geben Sie alle $x \in \mathbb{R}$ an, für die die Potenzreihen konvergieren.

LÖSUNG: (i) Seien a_n die Koeffizienten der ersten Potenzreihe. Dann gilt

$$a_n = \frac{3n^7}{2n!}.$$

Für den Konvergenzradius R gilt

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{3n^7}{2n!}}{\frac{3(n+1)^7}{2(n+1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1)\frac{n^7}{(n+1)^7} = \infty.$$

Folglich konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^7 x^n}{2n!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Seien b_n die Koeffizienten der zweiten Potenzreihe. Dann gilt

$$b_n = \frac{1}{n}.$$

Für den Konvergenzradius R gilt

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Am linken Rand des Konvergenzintervalls ($x = 0$) lautet die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Dies ist die alternierende harmonische Reihe, die bekanntlich konvergent ist. Am rechten Rand des Konvergenzintervalls ($x = 2$) lautet die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Dies ist die harmonische Reihe, die bekanntlich divergent ist. Daraus folgt, daß die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$ für alle $x \in [0, 2)$ konvergiert.

(iii) Seien c_n die Koeffizienten der dritten Potenzreihe. Dann gilt

$$c_n = \frac{(-4n)^n}{2n^3}.$$

Für den Konvergenzradius R gilt

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{(-4n)^n}{2n^3}\right|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2n^3}}{\sqrt[n]{(4n)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\sqrt[n]{2n^3}}^{\to 1}}{4n} = 0$$

Folglich konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4nx)^n}{2n^3}$ nur für $x = 0$.

(G 28) (Funktionenfolgen und Integration)

Sei

$$f_n : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} n & x < \frac{1}{n} \\ 0 & x \geq \frac{1}{n} \end{cases}.$$

(a) Gegen welche Funktion konvergiert die Funktionenfolge f_n punktweise?

(b) Konvergiert die Funktionenfolge f_n gleichmäßig?

(c) Berechnen Sie

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$$

und vergleichen Sie die Werte. Geben Sie auch eine Begründung an.

(d) Sei $a \in (0,1)$. Berechnen Sie

$$\int_a^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \int_a^1 f_n(x)dx$$

und vergleichen Sie die Werte. Geben Sie auch eine Begründung an.

Lösung: (a) Sei $x \in (0,1)$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ größer als $\frac{1}{x}$ gilt

$$f_n(x) = 0.$$

Daraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in (0,1).$$

Folglich konvergiert die Funktionenfolge f_n punktweise gegen die Funktion

$$f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 0.$$

(b) Die Funktionenfolge f_n konvergiert gleichmäßig gegen f, wenn

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_\infty = 0$$

gilt.

Da $f = 0$ ist, gilt

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_\infty = \lim_{n\to\infty} ||f_n||_\infty = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(0,1)} |f_n(x)| = \lim_{n\to\infty} n = \infty \neq 0$$

Daher konvergiert f_n *nicht gleichmäßig*.

(c) Aus $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ folgt

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 0dx = 0.$$

Für den zweiten Ausdruck gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx &= \lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} f_n(x)dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} ndx + \int_{\frac{1}{n}}^1 0dx \\ &= \lim_{n\to\infty} 1 = 1. \end{aligned}$$

Offensichtlich darf in diesem Fall Integration und Limesbildung nicht vertauscht werden. Der Satz aus dem Skript darf nicht angewendet werden, da die Funktionenfolge $(f_n)_n$ nicht gleichmäßig konvergiert.

(d) Aus $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ folgt

$$\int_a^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_a^1 0dx = 0.$$

Ist $a \geq \frac{1}{n}$, dann ist f_n auf dem Intervall $(a, 1)$ Null und daher $\int_a^1 f_n(x)dx = 0$. Da das $a > 0$ (und fest gewählt) und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ist, tritt dieser Fall für alle hinreichend großen n ein. Daher ist

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^1 f_n(x)dx = 0.$$

Daß die Werte in diesem Fall übereinstimmen, läßt sich dadurch erklären, daß die Funktionenfolge f_n eingeschränkt auf das Intervall $(a, 1)$ gleichmäßig gegen Null konvergiert.

(G 29) (Funktionenfolgen und Differentation)

Sei

$$f_n : [0, 1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^n}{n}.$$

1. Gegen welche Funktion konvergiert die Funktionenfolge f_n punktweise?
2. Konvergiert die Funktionenfolge f_n gleichmäßig?
3. Berechnen Sie

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} f_n'$$

und vergleichen Sie die Ergebnisse. An welchen Stellen treten Unterschiede auf und wie sind diese zu erklären?

Lösung: (a) Es gilt

$$0 \leq f_n(x) = \frac{x^n}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \text{für alle } x \in [0, 1].$$

Daraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

Folglich konvergiert die Funktionenfolge f_n punktweise gegen die Funktion

$$f : (0, 1) \to \mathbb{R} : x \mapsto 0.$$

(b) Es gilt $||f_n||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{x^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$. Daher ist

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_\infty = \lim_{n\to\infty} ||f_n||_\infty = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

woraus folgt, daß f_n *gleichmäßig* konvergiert.

(c) Da $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ ist, gilt auch

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = 0.$$

Allerdings ist $f_n'(x) = x^{n-1}$ und daher

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 1 \\ 1 & \text{falls } x = 1 \end{cases}.$$

Obwohl die Funktionenfolge f_n gleichmäßig konvergiert, können Differentation und Limesbildung nicht vertauscht werden, da in diesem Fall die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge f_n' nicht gegeben ist.

Hausübungen

(H 25) (Funktionalmatrix; 2+2+2 Punkte)

Gegeben sind zwei Vektorfelder

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ F(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)) \text{ und } G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ G(x,y) = (g_1(x,y), g_2(x,y)),$$

wobei $f_1(x,y) = x^2$, $f_2(x,y) = \exp(y)$, $g_1(x,y) = x\cos(y)$, $g_2(x,y) = \cos(x)$. Außerdem sei $H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gleich $F \circ G$, d.h. $H(x,y) = F(G(x,y))$.

(a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung von f_1, f_2, g_1 und g_2.

(b) Setzen Sie aus den partiellen Ableitungen aus (a) die Funktionalmatrizen $J_F(x,y)$ und $J_G(x,y)$ zusammen.

(c) Stellen Sie $J_F(g_1(x,y), g_2(x,y))$ auf, und bestimmen Sie die Funktionalmatrix von $J_H(x,y)$ mit Hilfe der Kettenregel. Geben Sie $J_H(\pi/2, \pi)$ an.

LÖSUNG: (a) Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x} f_1 = 2x, \quad \frac{\partial}{\partial y} f_1 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} f_2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} f_2 = \exp(y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} g_1 = \cos(y), \quad \frac{\partial}{\partial y} g_1 = -x\sin(y), \quad \frac{\partial}{\partial x} g_2 = -\sin(y), \quad \frac{\partial}{\partial y} g_2 = 0.$$

(b)

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & \exp(y) \end{pmatrix}, \qquad J_G(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(y) & -x\sin(y) \\ -\sin(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$J_F(g_1(x,y), g_2(x,y)) = \begin{pmatrix} 2x\cos(y) & 0 \\ 0 & \exp(\cos(x)) \end{pmatrix}$$

$$J_H(x,y) = J_F(g_1(x,y), g_2(x,y)) J_G(x,y) = \begin{pmatrix} 2x\cos^2(y) & -2x^2\cos(y)\sin(y) \\ -\exp(\cos(x))\sin(x) & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_H(\pi/2, \pi) = \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(H 26) (Reihen; 3+3 Punkte)

(a) Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n 2^n \cdot (x-2)^n\ .$$

(i) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe.

(ii) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Potenzreihe konvergiert.

(b) Zeigen Sie, daß die folgende Funktionenreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} [x^n(1-x)] \quad ,\ x \in \mathbb{R},$$

auf dem Intervall $[0,1]$ punktweise, aber nicht gleichmäßig konvergiert.

LÖSUNG: (a) (i) Berechnung des Konvergenzradius R:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(-1)^n n 2^n|} = \limsup_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 1} \sqrt[n]{2^n} = 1 \cdot 2$$

Wir erhalten $R = \frac{1}{2}$.

(ii) Aus Aufgabenteil (i) folgt, daß die Potenzreihe für $x \in (2 - \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2})$ konvergiert. Untersuchung der Randstelle $x = 1.5$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot 2^n \cdot n \cdot (1.5 - 2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot 2^n \cdot n \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n$$

existiert nicht.
Randstelle $x = 2.5$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot 2^n \cdot n \cdot (2.5 - 2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot 2^n \cdot n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n$$

existiert nicht.
Fazit: Die Potenzreihe konvergiert nur für $x \in (1.5, 2.5)$.

(b) Für $x < 1$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot (1-x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1-x) \cdot \frac{1}{1-x} = 1$ (geometrische Reihe). Für $x = 1$ erhalten wir $\sum_{n=0}^{\infty} 1^n \cdot (1-1) = 0$. Die Reihe konvergiert demnach punktweise gegen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x < 1, \\ 0 & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

Die Konvergenz kann nicht gleichmäßig sein, da die Grenzfunktion unstetig ist. (vgl. Satz über gleichmäßige Konvergenz stetiger Funktionen.)

(H 27) (Konvergenz von Funktionenfolgen; 1+3+3 Punkte)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ durch $f_n(x) = \min\left\{n, \frac{1}{x}\right\}$ gegeben.

(a) Skizzieren Sie f_1, f_2 und f_3.

(b) Gegen welche Grenzfunktion konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise auf dem Intervall $(0, \infty)$? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

(c) Zeigen Sie, daß die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $(0, \infty)$ nicht gleichmäßig konvergiert. Geben Sie Intervalle $I \subset (0, \infty)$ an, auf denen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent ist.

LÖSUNG: (a) Wir beachten zunächst, daß

$$f_n(x) = \min\left\{n, \frac{1}{x}\right\} = \begin{cases} n & \text{, falls } x \in \left(0, \frac{1}{n}\right] \\ \frac{1}{x} & \text{, falls } x \in \left(\frac{1}{n}, \infty\right) \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Hieraus lässt sich nun eine Skizze anfertigen.

(b) Die Skizze aus dem Aufgabenteil (a) läßt vermuten, daß die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

konvergiert. Wir wollen dies nun beweisen: Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Für ein vorgegebenes $x \in (0, \infty)$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{N} < x,$$

weshalb für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ dann

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < x$$

und somit

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right| = 0 < \varepsilon$$

gilt. Damit ist die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf dem Intervall $(0, \infty)$ *punktweise konvergent* gegen die Grenzfunktion f.

(c) Betrachten wir nun zuerst das Intervall $I = (0, \infty)$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $x < \frac{1}{n}$ gilt dann

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| n - \frac{1}{x} \right| \longrightarrow \infty \qquad \text{für } x \to 0$$

und es folgt

$$\sup_{x\in(0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow \infty \neq 0 \qquad \text{für } n \to \infty,$$

womit die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $I = (0, \infty)$ *nicht* gleichmäßig gegen f konvergieren kann.

Wählt man jedoch $I = [a, \infty)$ für ein $a \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < \infty$, so ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf I gleichmäßig konvergent gegen die Grenzfunktion f. Dies wollen wir nun zeigen:
Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Für ein fest vorgegebenes $a \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < \infty$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{N} < a.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt dann

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < a$$

und damit ist

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right| = |0| = 0 < \varepsilon$$

für alle $x \in I$. Somit haben wir gezeigt, daß es zu jedem $a \in (0, \infty)$ und für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß

$$\|f_n(x) - f(x)\|_\infty < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$. Damit ist die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf jedem Intervall $[a, \infty)$ mit $0 < a < \infty$ *gleichmäßig konvergent* gegen die Grenzfunktion f. ■