**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. C. Herrmann
Tobias Hansel
René Hartmann
Michael Klotz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 09 8.5.2009

# Mathematik II für ET, WI(ET), SpoInf, IST, BEd.ET, CE

## 4. Übung mit Lösungshinweisen

### Gruppenübungen

**(G 9) (Potential)**

Gegeben sei das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (x,y)$.

(a) Besitzt $F$ ein Potential? Wenn ja, geben Sie alle Stammfunktionen (Potentiale) an.

(b) Berechnen Sie das Wegintegral $\int_X F \cdot \mathrm{d}X$, wobei $X$ ein Weg mit Anfangspunkt $(-1,2)$ und Endpunkt $(2,3)$ ist.

(c) Sei $X$ ein Weg, dessen Kurve ein Dreieck mit Eckpunkten $(0,0),(0,1),(1,0)$ darstellt. Zeigen Sie, dass $\int\limits_X F \cdot \mathrm{d}X = 0$ gilt.

Lösung: (a) Alle Komponenten von $F = (F_1, F_2)$ sind partiell differenzierbar und es gilt

$$\partial_y F_1(x,y) = 0 \qquad = \qquad \partial_x F_2(x,y) = 0.$$

Also besitzt $F$ nach Satz 19.32 ein Potential.

Die Stammfunktionen $\varphi$ können aus der Definition 19.28 bestimmt werden:

$$F(x,y) = (\nabla\varphi)(x,y)\ ,$$

oder koordinatenweise

$$F_1(x,y) = \partial_x \varphi(x,y), \tag{1}$$
$$F_2(x,y) = \partial_y \varphi(x,y). \tag{2}$$

Damit lässt die Potentialfunktion $\varphi$ sich als

$$\varphi(x,y) = \int F_1(x,y)\mathrm{d}x, \tag{3}$$
$$\varphi(x,y) = \int F_2(x,y)\mathrm{d}y \tag{4}$$

schreiben. Aus der Gleichung (3) ergibt sich:

$$\varphi(x,y) = \int x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + f(y)\ ,$$

wo $f$ eine differenzierbare Funktion ist. Dann

$$\partial_y \varphi(x,y) = f'(y).$$

Im Vergleich mit Gleichung (2), bekommt man

$$f'(y) = F_2(x, y) = y \ ,$$

also $f(y) = \frac{y^2}{2} + c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Die Stammfunktionen sind dann

$$\varphi(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + c$$

mit der Konstante $c \in \mathbb{R}$.

**Andere Lösung:** Da $F$ ein Potential besitzt, ist ihr Wegintegral wegunabhängig, und es hängt nur von dem Anfangspunkt und Endpunkt des Weges ab (siehe Satz 19.30). Um das Potential zu berechnen integrieren wir $F$ nun entlang eines beliebigen Weges $X$ von $(0, 0)$ nach $(x, y)$. Z.B. können wir $X = X_1 \oplus X_2$ wählen, wobei $X_1$ das Geradenstück zwischen $(0, 0)$ und $(x, 0)$ und $X_2$ das Geradenstück zwischen $(x, 0)$ und $(x, y)$ ist. Wir benutzen nun Formel (19.6) mit der Summe $X = X_1 \oplus X_2$:

$$\int_X F \cdot \mathrm{d}X = \int_{X_1} F \cdot \mathrm{d}X_1 + \int_{X_2} F \cdot \mathrm{d}X_2 \ .$$

- Erster Teil: $t \in [0, x]$, $X_1(t) = (t, 0)$. Die Ableitung lautet $\dot{X}_1(t) = (1, 0)$.

$$\begin{aligned} \int_{X_1} F \cdot \mathrm{d}X_1 &= \int_0^x \langle F(X_1(t)), \dot{X}_1(t) \rangle \mathrm{d}t = \int_0^x \langle F(t, 0), (1, 0) \rangle \mathrm{d}t \\ &= \int_0^x [F_1(t, 0) \cdot 1 + F_2(t, 0) \cdot 0] \mathrm{d}t = \int_0^x t \mathrm{d}t = \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^x = \frac{x^2}{2} \ . \end{aligned}$$

- Zweiter Teil: $t \in [0, y]$, $X_2(t) = (x, t)$. Die Ableitung lautet $\dot{X}_1(t) = (0, 1)$ (die Ableitung ist bezüglich $t$, deshalb ist $x$ nur eine Konstante).

$$\begin{aligned} \int_{X_2} F \cdot \mathrm{d}X_2 &= \int_0^y \langle F(X_2(t)), \dot{X}_2(t) \rangle \mathrm{d}t = \int_0^y \langle F(x, t), (0, 1) \rangle \mathrm{d}t \\ &= \int_0^y [F_2(x, t) \cdot 0 + F_2(x, t) \cdot 1] \mathrm{d}t = \int_0^y t \mathrm{d}t = \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^y = \frac{y^2}{2} \ . \end{aligned}$$

  Die Summe ergibt:

$$\int_r F \cdot \mathrm{d}r = \int_{r_1} F \cdot \mathrm{d}r_1 + \int_{r_2} F \cdot \mathrm{d}r_2 = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \ .$$

  Um alle Stammfunktionen zu bestimmen, addiert man noch eine Konstante $c \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + c \ .$$

  (Das ist dasselbe Ergebnis wie vorher).

(b) Da die Funktion $F$ ein Potential besitzt, ist das Integral nach Satz 19.36 wegunabhängig und hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt ab. Das Integral lässt sich nach Satz 19.36 folgendermaßen berechnen:

$$\int_X F \cdot \mathrm{d}X = \varphi(2, 3) - \varphi(-1, 2) = \left( \frac{4}{2} + \frac{9}{2} \right) - \left( \frac{1}{2} + \frac{4}{2} \right) = 4. \ ,$$

(c) Die Funktion $F$ besitzt ein Potential, deshalb ist ihr Wegintegral entlang eines geschlossenen Weges gleich Null (vgl. Satz 19.30). Da $X$ geschlossen ist (sein Anfangspunkt und Endpunkt fallen zusammen), ist $\int_X F \cdot \mathrm{d}X = 0$.

### (G 10) (Stufenfunktionen / Integral)

Wir betrachten die Funktion $f : I = [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy$.

(a) Geben Sie für $n \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung $Z_n$ von $I$ in $n^2$ Teilintervalle an.

(b) Geben Sie zur Zerlegung $Z_n$ zwei Stufenfunktionen $\underline{f}_n$, $\overline{f}_n$ mit $\underline{f}_n \le f \le \overline{f}_n$ an.

(c) Benutzen Sie die Stufenfunktionen aus (b) um zu zeigen, dass $f$ auf $I$ Riemann-integrierbar ist.

Lösung: (a) Man kann z.B. die Zerlegung $Z_n$ so wählen, dass sie aus den Teilintervallen

$$I_{i,j} = [i\frac{1}{n}, (i+1)\frac{1}{n}] \times [j\frac{1}{n}, (j+1)\frac{1}{n}]$$

für $i, j = 0, \dots, n-1$ besteht.

(b) Für $x \in I_{i,j}$ $(i,j = 0, \dots, n-1)$ definieren wir

$$\underline{f}_n(x) = i\frac{1}{n} \cdot j\frac{1}{n} \quad \text{und} \quad \overline{f}_n(x) = (i+1)\frac{1}{n} \cdot (j+1)\frac{1}{n}.$$

Dies legt zwei Stufenfunktionen, mit der gewünschten Eigenschaft fest.

(c) Es gilt

$$\int_I \underline{f}_n(x,y)d(x,y) = \sum_{i,j=0,\dots,n-1} ij \cdot \frac{1}{n^3}$$

und

$$\int_I \overline{f}_n(x,y)d(x,y) = \sum_{i,j=0,\dots,n-1} (i+1)(j+1) \cdot \frac{1}{n^3}.$$

Also folgt

$$\int_I \overline{f}_n(x,y)d(x,y) - \int_I \overline{f}_n(x,y)d(x,y) = (n)^2 \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{1}{n} \to 0$$

für $n \to \infty$. Nach Korollar 20.4 ist $f$ also Riemann-integrierbar auf $I$.

### (G 11) (Satz von Fubini)

(a) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ das Quadrat mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ und $(1,1)$. Begründen Sie, warum die Funktion $f\colon A \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := x^2 + y^3 + 2xy^2$$

Riemann-integrierbar ist, und berechnen Sie dann das Integral $\int_A f(x,y)\, d(x,y)$.

(b) Wir betrachten den Quader $Q := A \times [0,5] \subseteq \mathbb{R}^3$ und die Funktion $g\colon Q \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x,y,z) := (x^2 + y^3 + 2xy^2)z.$$

Begründen Sie, warum die Funktion $g$ Riemann-integrierbar ist, und berechnen Sie dann das Integral $\int_Q g(x,y,z)\, d(x,y,z)$.

LÖSUNG: Da es sich bei $f$ und $g$ um stetige Funktionen auf kompakten Intervallen im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ handelt, sind die Funktionen Riemann-integrierbar (Theorem 20.9). Außerdem ist für festes $y$ die Funktion $f_y(x) = f(x,y)$ stetig und somit ebenfalls integrierbar. Mit dem Satz von Fubini (Satz 20.12) können wir die zu berechnenden Integrale zu iterierten Integralen umschreiben:

(a)

$$\begin{aligned}
\int_A f(x,y)\,d(x,y) &= \int_{[0,1]\times[0,1]} (x^2+y^3+2xy^2)\,d(x,y) \\
&= \int_{[0,1]} \left( \int_{[0,1]} (x^2+y^3+2xy^2)\,dx \right) dy \\
&= \int_{[0,1]} \Big[x^3/3 + xy^3 + x^2y^2\Big]_{x=0}^{x=1} dy \;=\; \int_0^1 (1/3+y^3+y^2)\,dy \\
&= \Big[y/3 + y^4/4 + y^3/3\Big]_0^1 \;=\; 1/3+1/4+1/3 \;=\; 11/12\,.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int_Q g(x,y,z)\,d(x,y,y) &= \int_{A\times[0,5]} f(x,y)z\,d(x,y,z) \\
&= \int_{[0,5]} \left( \int_A f(x,y)z\,d(x,y) \right) dz \\
&= \int_{[0,5]} z \left( \int_A f(x,y)\,d(x,y) \right) dz \\
&= \int_0^5 \frac{11}{12} z\,dz \;=\; \left[\frac{11}{24}z^2\right]_0^5 \;=\; \frac{11\cdot 25}{24} \;=\; \frac{275}{24}
\end{aligned}$$

### (G 12) (Jordan-Messbarkeit)

Kreuzen Sie alle wahren bzw. allgemeingültigen Aussagen an.

- ☐ Das Intervall $[1,2]\times[3,4]\times[0,5] \subseteq \mathbb{R}^3$ ist Jordan-messbar und hat Jordan-Inhalt 5.
- ☐ Das Intervall $(1,2)\times[3,4)\times[0,5] \subseteq \mathbb{R}^3$ ist Jordan-messbar und hat Jordan-Inhalt 5.
- ☐ Eine Menge im $\mathbb{R}^n$, die aus einem einzigen Punkt besteht, ist Jordan-messbar und hat den Inhalt 0, d.h., sie ist eine (Jordansche) Nullmenge.
- ☐ Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, so sind auch $A\cup B$, $A\cap B$ und $A\setminus B$ Jordan-messbar.
- ☐ Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, so ist auch $A\cup B$ Jordan-messbar und hat Inhalt $\mu(A\cup B) = \mu(A)+\mu(B)$.

LÖSUNG: Die Aussagen 1-4 sind wahr. Die Aussage 5 ist falsch.

## Hausübungen

### (H 11) (Parameterabhängige Integrale; 2+2+2 Punkte)

Im Folgenden sind die Funktionen $g_j : [1,2] \to \mathbb{R}$ (j=1,2,3) gegeben. Untersuchen Sie, ob die Funktionen $g_j$ differenzierbar sind und bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Ableitungen, ohne das jeweilige Integral auszurechnen.

$$g_1(y) = \int_0^1 e^{-yx^2} dx, \qquad g_2(y) = \int_{\frac{1}{y}}^{y} e^{-x^2} dx, \qquad g_3(y) = \int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

LÖSUNG: 1. Die Funktion $f_1(x,y) = e^{-yx^2}$ ist stetig auf $[0,1] \times [1,2]$. Also ist $g_1$ nach Satz 20.13 differenzierbar. Die Ableitung ist

$$g'(y) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} \mathrm{e}^{-yx^2} dx = -\int_0^1 x^2 \mathrm{e}^{-yx^2} dx.$$

2. Die Funktion $f_2(x,y) = e^{-x^2}$ ist steitig auf ganz $\mathbb{R}^2$ und stetig partiell differenzierbar nach $y$. Also ist nach Satz 20.14 die Funktion $g_2$ differenzierbar. Mit $\varphi(y) = \frac{1}{y}$ und $\psi(y) = y$ gilt

$$\begin{aligned} g_2'(y) &= \frac{d}{dx} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f_2(x,y)dx = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial}{\partial y} f_2(x,y)dx + f_2(\psi(y),y)\psi'(y) - f_2(\varphi(y),y)\varphi'(y) \\ &= f_2(y,y) + \frac{1}{y^2} f(\frac{1}{y}, y) = \mathrm{e}^{-y^2} + \frac{1}{y^2} \mathrm{e}^{-\frac{1}{y^2}}. \end{aligned}$$

3. Da $g_3$ konstant ist, d.h. nicht von $y$ abhängt, ist $g_3$ differenzierbar mit $g_3'(y) = 0$.

## (H 12) (Satz von Fubini; 3+3 Punkte)

(a) Es seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $I = [a,b] \times [c,d]$ ein Intervall in $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass

$$\int_I f(x)g(y)\, d(x,y) = \left( \int_a^b f(x)dx \right) \cdot \left( \int_c^d g(y)dy \right)$$

gilt.

(b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_I \sin(x+y) d(x,y) \text{ mit } I := \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

LÖSUNG: (a) Die Funktion $h : I \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = f(x)g(y)$ ist stetig auf $I$. Außerdem ist für jedes feste $y$ die Funktion $h_y(x) = h(x,y)$ stetig und somit ebenfalls integrierbar. Wir wenden nun den Satz von Fubini (Satz 20.12) an und erhalten

$$\begin{aligned} \int_I h(x,y) d(x,y) &= \int_c^d \left( \int_a^b h(x,y) dx \right) dy \\ &= \int_c^d \left( \int_a^b f(x)g(y) dx \right) dy \\ &= \int_c^d g(y) \left( \int_a^b f(x) dx \right) dy \\ &= \left( \int_c^d g(y)dy \right) \left( \int_a^b f(x)dx \right), \end{aligned}$$

da $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ nicht von $y$ abhängt.

(b) Da sowohl $f(x,y) = \sin(x+y)$ als auch $f_x(y) = f(x,y)$ für festes $x \in [0,1]$ stetig sind, sind sowohl $f$ als auch $f_x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ Riemann-integrierbar und der Satz von Fubini ist anwendbar:

$$\begin{aligned} \int_I \sin(x+y) d(x,y) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y) dy \Big) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[ -\cos(x+y) \Big]_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[ \cos(x) - \cos(x + \frac{\pi}{2}) \Big] dx \\ &= \sin x \Big|_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} - \sin(x + \frac{\pi}{2}) \Big|_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2. \end{aligned}$$

**(H 13) (Satz von Fubini nicht anwendbar; 3+3 Punkte)**

Gegeben seien das Intervall $I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ und die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{(x+y)^3} & \text{falls } (x,y) \in I\backslash\{0\} \\ 0 & \text{falls } (x,y) = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f$ in $(0,0)$ nicht stetig ist (und dass sie auch durch einen anderen Funktionswert in (0,0) nicht stetig gemacht werden kann).

(b) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 f(x,y)\ dy \right) dx = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \int_0^1 \left( \int_0^1 f(x,y)\ dx \right) dy = -\frac{1}{2}$$

gilt.

Erläutern Sie, warum die Funktion $f$ nicht Riemann-integrierbar sein kann.

*Hinweis:* Benutzen Sie bei Teil (b) die Substitution $u = x + y$.

LÖSUNG: (a) Man wähle die Folge

$$(x_n, y_n) = \left( \frac{2}{n}, \frac{1}{n} \right) \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Es gilt:

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n}}{\left(\frac{3}{n}\right)^3} = \frac{n^2}{27},$$

und somit $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \infty$. Also ist $f$ in $(0,0)$ nicht stetig.

(b) Wir berechnen das erste Integral.
Substituiere

$$u = x + y \quad mit \quad du = dy \quad \text{und} \quad x - y = 2x - u.$$

Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\ dy \right) dx &= \int_0^1 \left( \int_x^{x+1} \frac{2x-u}{u^3}\ du \right) dx = \int_0^1 \left( \int_x^{x+1} \left( \frac{2x}{u^3} - \frac{1}{u^2} \right)\ du \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[ -\frac{x}{u^2} + \frac{1}{u} \right]_{u=x}^{u=x+1} dx \\ &= \int_0^1 \left( -\frac{x}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x} \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\ dx \\ &= -\frac{1}{x+1}\bigg|_0^1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Mittels derselben Substitution berechnen wir das zweite Integral, wobei hier $x - y = u - 2y$.
Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\ dx \right) dy &= \int_0^1 \left( \int_y^{y+1} \frac{u-2y}{u^3}\ du \right) dy = \int_0^1 \left( \int_y^{y+1} \left( \frac{1}{u^2} - \frac{2y}{u^3} \right)\ du \right) dy \\ &= \int_0^1 \left[ -\frac{1}{u} + \frac{y}{u^2} \right]_{u=y}^{u=y+1} dy \\ &= \int_0^1 \left( -\frac{1}{y+1} + \frac{y}{(y+1)^2} + \frac{1}{y} - \frac{y}{y^2} \right) dx = -\int_0^1 \frac{1}{(y+1)^2}\ dx \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Wäre die Funktion $f$ Riemann-integrierbar, dann müssten die beiden Doppelintegrale nach dem Satz von Fubini (Satz 20.12) übereinstimmen. Da dies hier nicht der Fall ist, kann $f$ nicht Riemann-integrierbar sein.