Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
René Hartmann
Michael Klotz
Tobias Hansel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009 1.5.2009

Mathematik II für ET, WI(ET), SpoInf, iSt, BEd.ET, CE

3. Übung mit Lösungshinweisen

Hausübungen

(H 8) Totales Differential (2+1+2 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f = (x_1 + x_2)^2,\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie mit dem Ansatz $x_j \leftarrow (x_j + \Delta_j)$ das totale Differential von f, ohne partielle Ableitungen zu benutzen!

b) Wie a) aber verwenden Sie partielle Ableitungen.

c) Weshalb gelangt man zum gleichen Resultat? Begründen Sie Ihre Antwort!

LÖSUNG: a) Es ist

$$\begin{aligned} f(x_1 + \lambda dx_1, x_2 + dx_2) &= (x_1 + x_2 + (dx_1 + dx_2))^2 \\ &= f(x_1, x_2) + 2(x_1 + x_2)dx_1 + 2(x_1 + x_2)dx_2 + (dx_1 + dx_2)^2. \end{aligned}$$

Wir sortieren die Summanden nach dem Totalgrad der dx_j (in jedem Summanden ist dies die Summe der Exponenten der dx_j). Das Totale Differential besteht gerade aus den Termen die linear von den dx_j abhängen, d.h. jenen von Totalgrad 1. Also ist $df(dx_1, dx_2)$ an der Stelle (x_1, x_2) gegeben durch $2(x_1 + x_2)dx_1 + 2(x_1 + x_2)dx_2$.

b) Es ist $\frac{\partial f}{\partial x_j} = 2x_j, j \in \{1, 2\}$, somit $df(x_1, x_2)(dx_1, dx_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 = 2(x_1 + x_2)dx_1 + 2(x_1 + x_2)dx_2$.

c) Das totale Differential ist diejenige, in den Variablen $dx_1, \ldots, dx_n$ lineare Abbildung, welche die Funktion $f(x_1 + dx_1, \ldots, x_n + dx_n) - f(x_1, \ldots, x_n)$ am besten approximiert. Bei a) haben wir Summanden des in den Variablen (dx_1, dx_2) bivariaten Polynoms f nach ihrem Totalgrad getrennt; der lineare Anteil war gerade das totale Differential. Andererseits lässt sich die bestapproximierende lineare Funktion natürlich durch Ableiten bestimmen - wie in b).

(H 9) Vertauschbarkeit von Ableitungen (2+3 Punkte)

(a) Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine Funktion, deren partiellen Ableitungen existieren und von der Sie die partielle Ableitung $f_x(x, y, z) = \sin(x)e^{yz}$ auf ganz $\mathbb{R}^3$ kennen. Existiert die partielle Ableitung f_{yx} zweiter Ordnung (also die partielle Ableitung von f_y nach x)? Berechnen Sie diese gegebenenfalls.

(b) Zeigen Sie, dass es keine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ geben kann, für die $f_x(x, y) = \sin(x)y$ und $f_y(x, y) = \cos(x)$ gelten. *Hinweis:* Sollten Sie Sätze aus dem Skript verwenden geben Sie bitte deren Eigennamen, falls sie einen besitzen sollten, z.B. “Satz von Schwartz”, oder deren fortlaufende Nummer (“19.25”) an, wenn Sie die vollen Hausaufgabenpunkte erhalten möchten.

LÖSUNG: (a) Die Funktion f_x lässt sich partiell nach y ableiten. Es gilt nämlich

$$f_{xy}(x,y) = \sin(x)ze^{yz}.$$

Da alle partiellen Ableitungen von f existieren und ebenso die zweite partielle Ableitung f_{xy} existiert und stetig ist, lässt sich der Satz von Schwartz anwenden. Es folgt, dass auch f_{yx} existiert und durch

$$f_{yx}(x,y) = f_{xy}(x,y) = \sin(x)ze^{yz}$$

gegeben ist.

(b) Angenommen wir haben eine Funktion f mit den geforderten Eigenschaften. Neben den partiellen Ableitungen erster Ordnung existieren auch f_{xy} und f_{yx}. Es gilt nämlich $f_{xy}(x,y) = \sin(x)$ und $f_{yx}(x,y) = -\sin(x)$. Wegen der Stetigkeit von f_{xy} (oder auch der von f_{xy}) stimmen nach dem Satz von Schwartz f_{xy} und f_{yx} überein. Dies ist ein Widerspruch. Eine Funktion mit den geforderten Eigenschaften kann es daher nicht geben.

(H 10) Potential oder keins? (1+3 Punkte)

Gegeben seien wieder die Funktionen aus Aufgabe (G2), für welche Sie jeweils zwei Wegintegrale von $(0,0)$ nach $(1,1)$ bestimmt haben.

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} 6xy - 1 + y^2 \\ 3x^2 + 15y^2 \end{pmatrix}, \quad G(x,y) = \begin{pmatrix} 12y^2 + 6x^2 \\ 24xy + 5y^4 \end{pmatrix}.$$

a) Begründen Sie ohne zu rechnen weshalb eine der beiden Funktionen - und welche - kein Potential besitzen kann.

b) In der Vorlesung haben Sie sich mit der Frage beschäftigt, wann genau ein Potential zu einem Vektorfeld existiert. Wenden Sie dieses Wissen auf F und G an. Zitieren Sie dabei Sätze aus dem Skript mit deren Eigennamen, falls sie einen besitzen sollten, z.B. "Satz von Schwartz", oder mit ihrer fortlaufenden Nummer ("Satz 19.25") wenn Sie volle Hausaufgabenpunkte erhalten möchten.

LÖSUNG: a) Bei der Funktion F gelangten wir für zwei verschiedene Wege zu unterschiedlichen Werten des Wegintegrals. Besäße F ein Potential dann käme derselbe Wert heraus.

b) Ein stetig differenzierbares Vektorfeld $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ besitzt ein Potential gerade dann wenn

$$\frac{\partial H_i}{\partial x_j} = \frac{\partial H_j}{\partial x_i}, \quad \text{für alle } i,j \in \{1,\dots,n\},$$

gilt (Satz von Schwartz und Satz 19.32; siehe dazu auch die Bemerkung nach Satz 19.32). Demnach besitzt F kein Potential,

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 6x + 2y \neq 6x = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

G hingegen besitzt eins denn

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} = 24y = \frac{\partial G_2}{\partial x}.$$