**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. C. Herrmann
Tobias Hansel
René Hartmann
Michael Klotz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 09 24.4.2009

# Mathematik II für ET, WI(ET), SpoInf, IST, BEd.ET, CE

## 2. Übung mit Lösungshinweisen

### Gruppenübungen

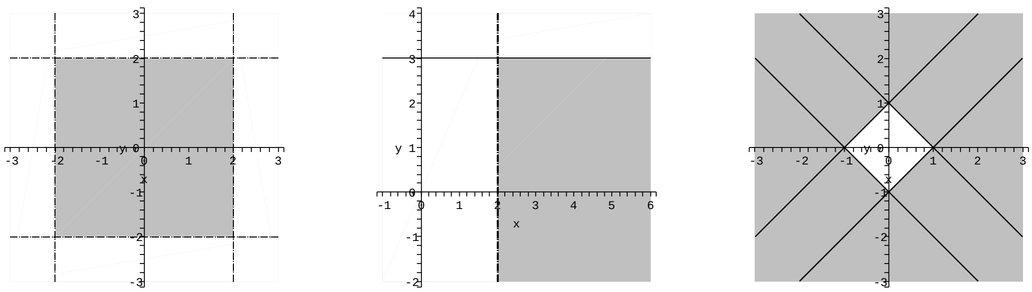
**(G 5) (Mengen im $\mathbb{R}^n$)**

Skizzieren Sie die Mengen

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x|,|y|) < 2\}, \\ B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 2,\ y \leq 3\} \text{ und} \\ C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \geq 1\} \end{aligned}$$

und geben Sie jeweils (mit Begründung!) an, ob sie offen, abgeschlossen, beschränkt bzw. kompakt sind.

Lösung: Skizzen:



zu A:

- offen, denn für jedes $(x,y) \in A$ ist $|x| < 2$ und $|y| < 2$, also gibt es ein $\epsilon_x > 0$ mit $|x| + \epsilon_x < 2$ und ein $\epsilon_y > 0$ mit $|y| + \epsilon_y < 2$. Für $\epsilon = \min\{\epsilon_x, \epsilon_y\}$ liegt die $\epsilon$-Umgebung um $(x,y)$ also in $A$. Also ist jeder Punkt von $A$ innerer Punkt, d.h. $A$ ist offen.
- nicht abgeschlossen, denn $(2,0)$ ist ein Randpunkt von $A$ (jede $\epsilon$-Umgebung von $(2,0)$ enthält den Punkt $(2-\frac{\epsilon}{2},0) \in A$ und den Punkt $(2+\frac{\epsilon}{2},0) \notin A$) daher $(2,0) \notin A$.
- beschränkt, da für alle $(x,y) \in A$ gilt

$$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}.$$

- nicht kompakt, da nicht abgeschlossen.

zu B:

- nicht offen, denn $(3,3) \in B$, aber $(3,3)$ ist kein innerer Punkt von B, denn in jeder $\epsilon$-Umgebung von $(3,3)$ liegt der Punkt $(3, 3+\frac{\epsilon}{2})$, der nicht zu $B$ gehört.
- nicht abgeschlossen, denn $(2,0) \in \partial B$ (Begründung wie oben), aber $(2,0) \notin B$.
- nicht beschränkt, denn $(3,n) \in B \ \forall n \in \mathbb{N}$ und

$$\lim_{n\to\infty} \|(3,n)\| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{9+n^2} = \infty.$$

- nicht kompakt, da nicht abgeschlossen.

zu C:

- nicht offen, denn $(-1,0) \in C$, aber ist kein innerer Punkt.
- abgeschlossen, denn $\partial C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\} \subseteq C$.
- nicht beschränkt, denn $(n,0) \in C \ \forall n \in \mathbb{N}$.
- nicht kompakt, da nicht beschränkt.

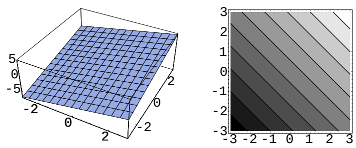
## (G 6) (Funktionen in 2 Variablen)

Wir betrachten die folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

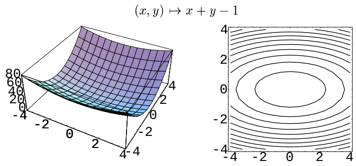
$$\begin{array}{lll} f_1(x,y) = x+y-1, & f_2(x,y) = x^2+4y^2, & f_3(x,y) = x^2-y^2-8, \\ f_4(x,y) = \sin(x), & f_5(x,y) = \frac{1}{(1-x)(1-y)}, & f_6(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+10}, \\ f_7(x,y) = \ln(x^2+y^2), & f_8(x,y) = \tan(x^2+y^2), & f_9(x,y) = e^{x+y}, \\ f_{10}(x,y) = x^3-y^2+4, & f_{11}(x,y) = \sin(x)\cdot\sin(y). & \end{array}$$

Die Graphen und Niveaumengen (Höhenlinien) dieser Funktionen sind auf dem Extrablatt angegeben. Allerdings ist die Reihenfolge etwas durcheinander geraten. Ordnen Sie den Graphen und Höhenlinien die richtigen Funktionen $f_i$ $(i = 1, \ldots, 11)$ zu.
Beachten Sie, dass die Auflösungsmöglichkeiten des Rechners begrenzt sind, so dass einige Bilder ungenau sind.
Zur Erinnerung: Die Niveaumenge (Höhenlinie) einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist die Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = c\}$ für vorgegebenes $c \in \mathbb{R}$

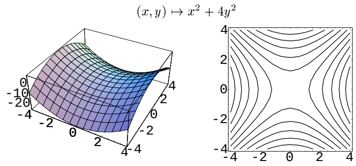
LÖSUNG:



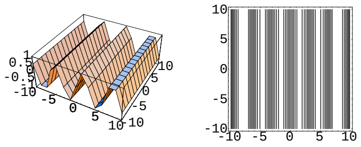
$(x,y) \mapsto x+y-1$



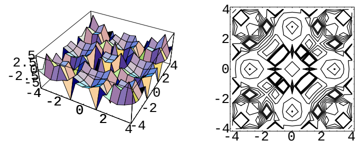
$(x,y) \mapsto x^2+4y^2$



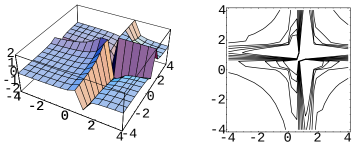
$(x,y) \mapsto x^2-y^2-8$



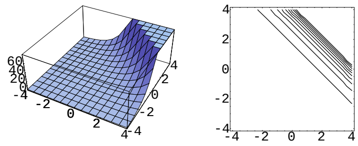
$(x, y) \mapsto \sin(x)$



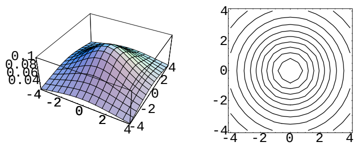
$(x, y) \mapsto \tan(x^2 + y^2)$



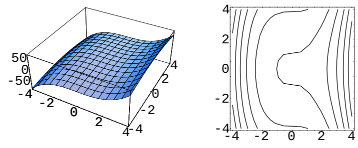
$(x, y) \mapsto \frac{1}{(1-x)(1-y)}$



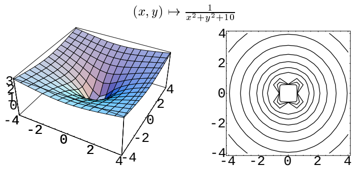
$(x, y) \mapsto e^{x+y}$



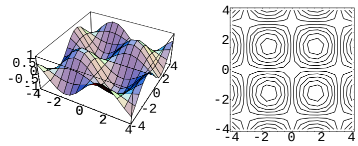
$(x, y) \mapsto \frac{1}{x^2+y^2+10}$



$(x, y) \mapsto x^3 - y^2 + 4$



$(x, y) \mapsto \log(x^2 + y^2)$



$(x, y) \mapsto \sin(x) \cdot \sin(y)$

## (G 7) (Niveaumengen, Stetigkeit)

Sei $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0\}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{y}.$$

Skizzieren Sie die Niveaumengen (Höhenlinien) $\{(x, y) : f(x, y) = c\}$ für die Werte $c = 1$, $c = 2$ und $c = 3$.
Ist $f$ stetig auf $D$? Lässt sich $f$ zu einer stetigen Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fortsetzen? Überlegen Sie sich dies zuerst anschaulich und versuchen Sie dies dann zu beweisen.

LÖSUNG: Die Höhenlinie zur Höhe $c \in \mathbb{R}$ besteht aus allen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = c$. Wir berechnen:

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{y} = c \Leftrightarrow x^2 + y^2 - cy = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{c}{2}\right)^2 - \frac{c^2}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{c}{2}\right)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

Somit ist die Höhenlinie zur Höhe $c$ ein Kreis mit Mittelpunkt $(0, c/2)$ und Radius $c/2$.

In $D$ ist $f$ als Zusammensetzung von stetigen Funktionen stetig. Problematisch wird es nur für $y = 0$.
Anschaulich kann $f$ in $(0, 0)$ nicht stetig sein, denn $(0, 0)$ liegt auf jeder Höhenlinie, d.h. $f(0, 0)$ müsste auf jeder Höhe liegen. Ein analytisches Argument ist das folgende:
Es gilt $\lim_{y\to 0}(0, y) = (0, 0)$ und $\lim_{y\to 0}(\sqrt{y}, y) = (0, 0)$. Allerdings gilt auch

$$\lim_{y\to 0} f(0, y) = \lim_{y\to 0} \frac{0 + y^2}{y} = \lim_{y\to 0} y = 0$$

und

$$\lim_{y\to 0} f(\sqrt{y}, y) = \lim_{y\to 0} \frac{y + y^2}{y} = \lim_{y\to 0}(1 + y) = 1.$$

Somit kann $f$ nicht stetig in $(0, 0)$ fortgesetzt werden.

### (G 8) (Partielle Ableitung)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \cos(x+y-1) \cdot y^7 + \log(y) \cdot x^7 \cdot \log\left(1 + \frac{\sin^2(xy)}{1+y^4}\right) \cdot \arctan\left(\frac{1+x^2y^4}{3+x^4}\right).$$

Bestimmen Sie $\frac{\partial}{\partial x} f(x,1)$.
*Hinweis:* Es wird hier nicht verlangt, dass man $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ allgemein berechnet. Beachten Sie, dass beim partiellen Differenzieren nach $x$, die Variable $y$ als konstant betrachtet wird.

Lösung: Wir machen uns zunächst klar, dass $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ die Ableitung von $f$ ist, die wir erhalten, wenn wir $y$ als konstant betrachten. Daher können wir um $\frac{\partial}{\partial x} f(x,1)$ zu bestimmen, zunächst $y = 1$ setzen und dann nach $x$ ableiten. Da $\log(1) = 0$ gilt, erhalten wir $f(x,1) = \cos(x)$ und somit $\frac{\partial}{\partial x} f(x,1) = -\sin(x)$.

## Hausübungen

### (H 5) (Stetigkeit und partielle Ableitungen; 6 Punkte)

Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3+y^2}{x^2+y^2} & \text{falls } x \neq 0 \text{ oder } y \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = y = 0 \end{cases}.$$

An welchen Stellen ist die Funktion $f$ partiell differenzierbar? Berechnen Sie dort die partiellen Ableitungen.

Lösung: Für $(x,y) \neq 0$ gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2(x^2+y^2) - 2x(x^3+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = x\frac{x^3+3xy^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y(x^2+y^2) - 2y(x^3+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 2x^2y\frac{1-x}{(x^2+y^2)^2}.$$

Im Nullpunkt gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

und

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2}{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} = \infty.$$

Da die partielle Ableitung nach $y$ nicht existiert ist $f$ im Nullpunkt nicht partiell differenzierbar.

### (H 6) (Partielle Ableitung, Gradient, Richtungsableitung; 6 Punkte)

Berechnen Sie für die folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(i = 1,2)$ jeweils alle partiellen Ableitungen, den Gradienten und die Richtungsableitung entlang der Diagonalen (d.h. in Richtung $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^{\mathrm{T}}$):

(i) $f_1(x,y) = \arctan\left(\dfrac{x}{y}\right)$ $(y \neq 0)$ (ii) $f_2(x,y) = 3\mathrm{e}^{xy} + 7x^2 + 3y^2x - 3$

LÖSUNG: (i)

$$\frac{\partial}{\partial x} f_1(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{y+\frac{x^2}{y}} = \frac{1}{\frac{1}{y}(y^2+x^2)} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f_1(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot x \cdot \frac{-1}{y^2} = \frac{-x}{y^2+x^2} = \frac{-x}{x^2+y^2}$$

$$\nabla f_1(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} f_1(x,y) = \nabla f_1(x,y) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^{\mathrm{T}} = \frac{y-x}{\sqrt{2}(x^2+y^2)}$$

(ii)

$$\frac{\partial}{\partial x} f_2(x,y) = 3y\mathrm{e}^{xy} + 14x + 3y^2$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f_2(x,y) = 3x\mathrm{e}^{xy} + 6xy$$

$$\nabla f_2(x,y) = \left(3y\mathrm{e}^{xy} + 14x + 3y^2, 3x\mathrm{e}^{xy} + 6xy\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} f_2(x,y) = \nabla f_2(x,y) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(3(x+y)\mathrm{e}^{xy} + 6xy + 14x + 3y^2)$$

## (H 7) (Niveaumengen, Gradient; 2+2+1 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

für Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(a) Skizzieren Sie die Niveaumengen (Höhenlinien) $\{(x,y) : g(x,y) = c\}$ für die Werte $c = 1$, $c = 2$ und $c = 3$.

(b) Berechnen Sie den Gradienten von $g$.

(c) Bestimmen Sie die Richtung des steilsten Anstiegs im Punkt $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

LÖSUNG: (a) Die Höhenlinie zur Höhe $c \in \mathbb{R}$ besteht aus allen Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mit $g(x,y) = c$. Wir berechnen:

$$g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = c \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{c^2}$$

Somit ist die Höhenlinie zur Höhe $c$ ein Kreis mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius $1/c$.

(b) Es gilt

$$\nabla g(x,y) = -1/(x^2+y^2)^{3/2}(x,y).$$

(c) Es gilt $\nabla g(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = -(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Da der Gradient immer in die Richtung des steilsten Anstiegs zeigt, folgt, dass $-(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ die Richtung des steilsten Anstiegs im Punkt $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ ist.