Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
Tobias Hansel
René Hartmann
Michael Klotz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 09 17.7.2009

Mathematik II für ET, WI(ET), SpoInf, IST, BEd.ET, CE

14. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 49) (Implizite Funktionen)

Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = \sin^2 y + x^3 - 1$.

(a) Kann man für $(\sqrt[3]{0.5}, \pi/4)$ die Gleichung $g(x, y) = 0$ lokal nach y auflösen, d.h. gibt es eine geeignete Umgebung I von $\sqrt[3]{0.5}$, so dass in dieser Umgebung aus $g(x, y) = 0$ die Existenz einer differenzierbaren Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit $y = f(x)$ folgt?

(b) Berechnen Sie $f'(\sqrt[3]{0.5})$.

LÖSUNG: (a) Offentsichtlich ist die Funktion g einmal stetig partiell differenzierbar. Für die partielle Ableitung bezüglich y errechnet man $g_y(x, y) = 2 \sin(y) \cos(y)$. Also gilt $g_y(x, y) \neq 0$ für alle $y \neq \frac{k}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}$. Insbesondere ist also $g_y(x_0, y_0) \neq 0$, wobei $(x_0, y_0) = (\sqrt[3]{0.5}, \pi/4)$. Außerdem gilt $g(x_0, y_0) = 0$. Somit existiert nach dem Satz über implizite Funktionen (Satz 30.1 im Skript) eine Umgebung I von x_0 und eine differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit $y_0 = f(x_0)$ und $g(x, f(x)) = 0$, $x \in I$.

(b) Nach Teil (a) gilt $f(x_0) = y_0$. Weiterhin gilt nach Satz 30.1 im Skript

$$f'(x) = -\frac{g_x(x, f(x))}{g_y(x, f(x))},$$

für $x \in I$. Also erhalten wir

$$f'(x_0) = -\frac{3x_0^2}{2 \cos(y_0) \sin(y_0)} = -3(\sqrt[3]{0.5})^2.$$

(G 50) (Lokale Umkehrbarkeit)

Zeigen Sie, dass die Abbildung $F \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

für jedes $(x, y) \neq (0, 0)$ lokal umkehrbar ist. Bestimmen Sie das Urbild $F^{-1}(\{(a, b)\})$ eines beliebigen Punktes $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

LÖSUNG: Offensichtlich ist F stetig differenzierbar. Für die lokale Umkehrung müssen wir (nach Satz 30.3 im Skript) zeigen, dass die Jacobimatrix $J_F(x, y)$ für alle $(x, y) \neq (0, 0)$ invertierbar ist. Da gilt

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \quad \text{und damit} \quad \det(J_F(x,y)) = 4(x^2+y^2)$$

folgt, dass $J_F(x, y)$ für alle $(x, y) \neq (0, 0)$ invertierbar ist.

Nun wollen wir das Urbild eines beliebigen Punktes $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ bestimmen: Sei $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ beliebig. Wir suchen die Menge aller $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $F(x, y) = (a, b)$. Es gilt

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \implies 2xy = b.$$

Wir untersuchen zwei Fälle:

- $b \neq 0$: Dann gilt $y \neq 0$ und damit $x = \frac{b}{2y}$. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{b^2}{4y^2} - y^2 = a \quad &\overset{y\neq 0}{\iff} \quad y^4 + ay^2 - \frac{b^2}{4} = 0 \\
&\implies \quad y^2 = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}} \\
&\overset{y^2 \geq 0}{\implies} \quad y^2 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}} \\
&\implies \quad y = \pm\sqrt{-\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\
& \quad x = \pm\frac{b}{2\sqrt{-\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}}}
\end{aligned}$$

- $b = 0$: Dann gilt $x = 0$ oder $y = 0$ (und $a \neq 0$). Ist $a > 0$, so muss $y = 0$ und $x = \pm\sqrt{a}$ gelten. Ist $a < 0$, so muss $x = 0$ und $y = \pm\sqrt{a}$ gelten.

(G 51) (Implizite Funktionen)

Betrachten Sie das Gleichungsystem

$$\begin{aligned} 1 &= x^2 + 3y^2 + 6z^2, \\ 0 &= x + y + z\,. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass dieses System in einer Umgebung U des Punktes $(0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ eindeutig nach y, z aufgelöst werden kann, d.h. es gibt eine Funktion $f = (f_1, f_2) : U \to \mathbb{R}^2$, so dass $x, y = f_1(x)$, $z = f_2(x)$ das System löst.

(b) Berechnen Sie $f'(0)$.

LÖSUNG: 1. Klar ist, dass $(0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ das Gleichungssystem löst. Dann ist

$$\begin{aligned} g_1(x,y,z) &:= x^2 + 3y^2 + 6z^2 - 1 = 0 \\ g_2(x,y,z) &:= x + y + z = 0\,. \end{aligned}$$

Die Determinante der Funktionalmatrix lautet

$$\det\left(\frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(y,z)}(0,\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{3})\right) = \begin{vmatrix} 6y & 12z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}_{(0,\frac{1}{3},-\frac{1}{3})} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Folglich existiert nach Satz 30.2 im Skript eine Funktion $f = (f_1, f_2) : U \to \mathbb{R}^2$, d.h. es gibt die eindeutige Auflösung nach dem Satz über implizite Funktionen.

2. Wir setzen formal $y = f_1(x), z = f_2(x)$ in das Gleichungsystem ein und differenzieren beide Gleichungen nach x. Das ergibt

$$\begin{aligned} 1 &= x^2 + 3f_1(x)^2 + 6f_2(x)^2 \\ 0 &= x + f_1(x) + f_2(x) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 0 &= 2x + 6f_1(x)f_1'(x) + 12f_2(x)f_2'(x) \\ 0 &= 1 + f_1'(x) + f_2'(x) \ . \end{aligned}$$

Diese Gleichungen gelten insbesondere im betrachteten Punkt mit $x = 0$. Daher gilt mit $(0, f_1(0), f_2(0)) = (0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{6}{3}f_1'(0) + \frac{-12}{3}f_2'(0) = 2f_1'(0) - 4f_2'(0) \\ 0 &= 1 + f_1'(0) + f_2'(0) \ . \end{aligned}$$

Das ist ein lineares System für die Werte $f_1'(0), f_2'(0)$, welche eindeutig bestimmt sind, und die Lösung ist: $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.