

13. Übungsblatt zur „Mathematik II für ET, WI(ET), SpoInf, IKT, IST, CE, Mechatronik“

Gruppenübung

Aufgabe G44 (Taylorentwicklung)

Gegeben sei die Funktion $f : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, mit

$$f(x, y) = x^4 \ln(xy).$$

- (a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $D^{(0,0)}f(x, y)$, $D^{(1,0)}f(x, y)$, $D^{(0,1)}f(x, y)$, $D^{(2,0)}f(x, y)$, $D^{(0,2)}f(x, y)$ und $D^{(1,1)}f(x, y)$.
- (b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung um den Entwicklungspunkt $(1, 1)$, also:

$$j_{(1,1)}^2(h) = \sum_{|\alpha| \leq 2} \frac{1}{\alpha!} (D^\alpha f)(1, 1) h^\alpha.$$

Oder so notiert: $j_{(1,1)}^2((x, y) - (1, 1)) = \sum_{|\alpha| \leq 2} \frac{1}{\alpha!} (D^\alpha f)(1, 1) ((x, y) - (1, 1))^\alpha$.

- (c) Für jedes $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, für das die Verbindungsstrecke zwischen $(1, 1)$ und $(1, 1) + h$ im Definitionsbereich der Funktion f ist, gibt es dann nach dem Satz von Taylor ein $\tau \in]0, 1[$, sodass

$$f((1, 1) + h) = j_{(1,1)}^2(h) + \text{Restglied} = \sum_{|\alpha| \leq 2} \frac{1}{\alpha!} (D^\alpha f)(1, 1) h^\alpha + \sum_{|\alpha|=3} \frac{(D^\alpha f)((1, 1) + \tau h)}{\alpha!} h^\alpha$$

gilt. Der Funktionswert $f(1, 0.8)$ lässt sich durch das Taylorpolynom approximieren. Schätzen Sie den Fehler nach oben ab, den Sie dabei begehen, indem Sie das Restglied abschätzen.

Hinweis: Anstatt für das Restglied alle partiellen Ableitungen dritter Ordnung von f auszurechnen, denken Sie erst darüber nach, welche sie danach wirklich benötigen.

Lösung:

(a)(b) Die benötigten partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} ((D^{(0,0)}f)(x, y) =) \quad & f(x, y) = x^4 \ln(xy), \quad f(1, 1) = 0 \\ ((D^{(1,0)}f)(x, y) =) \quad & f_x(x, y) = 4x^3 \ln(xy) + x^3, \quad f_x(1, 1) = 1 \\ ((D^{(0,1)}f)(x, y) =) \quad & f_y(x, y) = \frac{x^4}{y}, \quad f_y(1, 1) = 1 \\ ((D^{(2,0)}f)(x, y) =) \quad & f_{xx}(x, y) = 12x^2 \ln(xy) + 7x^2, \quad f_{xx}(1, 1) = 7 \\ ((D^{(0,2)}f)(x, y) =) \quad & f_{yy}(x, y) = -\frac{x^4}{y^2}, \quad f_{yy}(1, 1) = -1 \\ ((D^{(1,1)}f)(x, y) =) \quad & f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = \frac{4x^3}{y}, \quad f_{xy}(1, 1) = 4. \end{aligned}$$

Damit lautet das gesuchte Taylorpolynom

$$\begin{aligned} j_{(1,1)}^2(h_1, h_2) &= f(1, 1) + f_x(1, 1)h_1 + f_y(1, 1)h_2 + f_{xx}(1, 1)\frac{h_1^2}{2} \\ &\quad + f_{xy}(1, 1)h_1h_2 + f_{yy}(1, 1)\frac{h_2^2}{2} \\ &= 0 + h_1 + h_2 + \frac{7}{2}h_1^2 + 4h_1h_2 - \frac{1}{2}h_2^2 \end{aligned}$$

oder so:

$$\begin{aligned} j_{(1,1)}^2(x-1, y-1) &= f(1, 1) + f_x(1, 1)(x-1) + f_y(1, 1)(y-1) + f_{xx}(1, 1)\frac{(x-1)^2}{2} \\ &\quad + f_{xy}(1, 1)(x-1)(y-1) + f_{yy}(1, 1)\frac{(y-1)^2}{2} \\ &= 0 + (x-1) + (y-1) + \frac{7}{2}(x-1)^2 + 4(x-1)(y-1) - \frac{1}{2}(y-1)^2 \end{aligned}$$

(c)

$$h = (1, 0.8) - (1, 1) = (0, -0.2)$$

Das Restglied ist:

$$\begin{aligned} R(h) &= \sum_{|\alpha|=3} \frac{(D^\alpha f)((1, 1) + \tau h)}{\alpha!} h^\alpha = \frac{(D^{(0,3)}f)(1, 1 - 0.2\tau)}{0! \cdot 3!} 0^0 (-0.2)^3 \\ &= \frac{1}{3!} (-0.2)^3 f_{yyy}(1, 1 - 0.2\tau), \quad \text{mit einem } \tau \in (0, 1), \end{aligned}$$

denn h^α ist für alle α gleich 0, außer für $\alpha = (0, 3)$. (Beispiel: $h^{(1,2)} = 0^1 \cdot (-0.2)^2 = 0$. Hinweis: Man beachte, dass x^0 im Kontext von Polynomen/Reihen immer als 1 definiert wird, also dass $0^0 = 1$ gilt.)

Wir haben $f_{yyy}(x, y) = \frac{2x^4}{y^3}$.

Restgliedabschätzung:

$$\begin{aligned}
 R(h) &= \frac{1}{3!}(-0.2)^3 f_{yyy}(1, 1 - 0.2\tau), \\
 &= \frac{1}{6}(-0.2)^3 \frac{2 \cdot 1^4}{(1 - 0.2\tau)^3} \\
 |R(h)| &\leq \frac{4}{3}10^{-3} \sup_{\tau \in (0,1)} \frac{2}{(1 - 0.2\tau)^3} \\
 &= \frac{4}{3}10^{-3} \frac{2}{(0,8)^3} \approx 5,2083 \cdot 10^{-3}.
 \end{aligned}$$

Aufgabe G45 (Extremwertbestimmung: ein Vergleich)

Wir vergleichen die Extremwertbestimmung von reellen Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit einer Veränderlichen mit Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit mehreren Veränderlichen.

Falls f differenzierbar bzw. stetig partiell differenzierbar ist, ist die notwendige Bedingung für eine lokale Extremstelle x :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diff.bar	$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig partiell diff.bar	Man nennt x einen...
$f'(x) = 0$	$(\text{grad } f)(x) = 0$	stationären Punkt

Sei nun die Funktion f zweimal differenzierbar bzw. zweimal stetig partiell differenzierbar und sei x ein stationärer Punkt. Vervollständigen Sie die folgende Tabelle:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2mal diff.bar	$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 2mal stetig partiell diff.bar	Dann ist bei x ein...
$f''(x) > 0$	$(\text{Hess } f)(x)$ ist	lokales Minimum
$f''(x) < 0$	$(\text{Hess } f)(x)$ ist	lokales Maximum
—	$(\text{Hess } f)(x)$ ist	Sattelpunkt
$f''(x) = 0$	$(\text{Hess } f)(x)$ ist	(wir wissen es nicht)

mit den Einträgen:

- (a) indefinit
- (b) positiv definit
- (c) negativ definit
- (d) (positiv/negativ) semidefinit

Lösung:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2mal diff.bar	$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 2mal stetig partiell diff.bar	Dann ist bei x ein...
$f''(x) > 0$	$(\text{Hess } f)(x)$ ist positiv definit	lokales Minimum
$f''(x) < 0$	$(\text{Hess } f)(x)$ ist negativ definit	lokales Maximum
—	$(\text{Hess } f)(x)$ ist indefinit	Sattelpunkt
$f''(x) = 0$	$(\text{Hess } f)(x)$ ist semidefinit	(wir wissen es nicht)

Aufgabe G46 (Extremwertbestimmung)

Gegeben sei die Funktion $f: (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$, mit

$$f(x, y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - 9x + 4y.$$

- (a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f . (Stationäre Punkte sind die Kandidaten für lokale Extrema.)

- (b) Bestimmen Sie alle Stellen, in denen die Funktion ein lokales Extremum hat und geben Sie jeweils an, ob es sich um ein lokales Maximum oder Minimum handelt.

Lösung: Den Gradienten nullsetzen:

$$(\text{grad } f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2} - 9 \\ -\frac{1}{y^2} + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies x = \pm \frac{1}{3}, \quad y = \pm \frac{1}{2}.$$

Kandidaten für Extremstellen sind also

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right), \quad (x_2, y_2) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right), \quad (x_3, y_3) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right), \quad (x_4, y_4) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right).$$

Klassifizieren mit der Hesse-Matrix:

$$(\text{Hess } f)(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{x^3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{y^3} \end{pmatrix}$$

$$(\text{Hess } f)(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} -54 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{pos./neg. Eigenwerte: Sattelpunkt}$$

$$(\text{Hess } f)(x_2, y_2) = \begin{pmatrix} -54 & 0 \\ 0 & -16 \end{pmatrix} \quad \text{nur neg. Eigenwerte: lok. Maximum}$$

$$(\text{Hess } f)(x_3, y_3) = \begin{pmatrix} 54 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{nur pos. Eigenwerte: lok. Minimum}$$

$$(\text{Hess } f)(x_4, y_4) = \begin{pmatrix} 54 & 0 \\ 0 & -16 \end{pmatrix} \quad \text{pos./neg. Eigenwerte: Sattelpunkt}$$

Aufgabe G47 (Erinnerung)

Kreuzen Sie korrekte Aussagen an:

- Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.
- Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt kompakt, wenn sie offen und beschränkt ist.
- Jede stetige reelle Funktion $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer kompakten Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ nimmt ein Maximum und ein Minimum an.

Aufgabe G48 (Methode von Lagrange)

Bestimmen Sie mithilfe einer Lagrange-Funktion die Extremwerte von

$$f(x, y) = xy, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

unter der Nebenbedingung $x^2 + 4y^2 - 2 = 0$.

Lösung: Die Lagrange-Funktion lautet $L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x^2 + 4y^2 - 2)$. Jede lokale Extremalstelle (x, y) (unter der Nebenbedingung) erfüllt:

$$L_x(x, y, \lambda) = y + 2\lambda x \stackrel{!}{=} 0,$$

$$L_y(x, y, \lambda) = x + 8\lambda y \stackrel{!}{=} 0,$$

$$L_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + 4y^2 - 2 \stackrel{!}{=} 0.$$

Aus Gleichung 1 ergibt sich $y = -2\lambda x$, mit Gleichung 2 ergibt sich dann $x(1 - 16\lambda^2) = 0$, d.h. einer der beiden Faktoren ist 0. Unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall 1: $x = 0$. Dann ist auch $y = 0$, sodass ein Widerspruch zur Gleichung 3 entsteht.

Fall 2: $(1 - 16\lambda^2) = 0$. Dann erhält man $\lambda^2 = \frac{1}{16}$ (d.h. $\lambda = \pm\frac{1}{4}$). Setzt man dies in die dritte Gleichung ein, erhält man $2x^2 = 2$.

Somit ergeben sich folgende möglichen Kandidaten für die lokalen Extrema:

$$\begin{aligned} x_1 = 1 & & y_1 = \frac{1}{2}, \\ x_2 = 1 & & y_2 = -\frac{1}{2}, \\ x_3 = -1 & & y_3 = \frac{1}{2}, \\ x_4 = -1 & & y_4 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Weiterhin ist $f(x_1, y_1) = f(x_4, y_4) = \frac{1}{2}$, $f(x_2, y_2) = f(x_3, y_3) = -\frac{1}{2}$.

Ungeklärt ist zunächst, ob dies wirklich lokale Extrema sind. Daher folgende Überlegung: Der zulässige Bereich $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 = 2\}$ ist eine Ellipse, also eine kompakte Teilmenge. (Anmerkung: Der zulässige Bereich ist eine Höhenlinie der stetigen Funktion $g(x) := x^2 + 4y^2$. Höhenlinien zu stetigen Funktionen sind stets abgeschlossen, sodass man i.a. lediglich überprüfen muss, ob die Menge beschränkt ist, um Kompaktheit zu zeigen.) Die Funktion f ist stetig, sodass sie auf der kompakten Teilmenge K ein globales Maximum und Minimum annehmen muss. Damit sind (x_1, y_1) und (x_4, y_4) die Maximalstellen, (x_2, y_2) und (x_3, y_3) die Minimalstellen.

Hausübung

Aufgabe H39 (Multiindizes)

(4 Punkte)

Zur Erinnerung: Ein Multiindex ist ein n -Tupel $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ (vgl 28.1.2). Betrachten wir das Beispiel $\alpha = (1, 4, 2)$.

- Geben Sie die Ordnung $|\alpha|$ und die Fakultät $\alpha!$ von α an.
- Was versteht man unter h^α für ein $h \in \mathbb{R}^n$? Rechnen Sie exemplarisch mit $h = (0.5, 2, 3)$.
- Sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ eine $|\alpha|$ -mal stetig partiell differenzierbare Funktion. Was versteht man unter $(D^\alpha f)(x, y, z)$? Kreuzen Sie alle wahren Aussagen an:

$(D^\alpha f)(x, y, z) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x \partial y^4 \partial z^2}(x, y, z)$

$(D^\alpha f)(x, y, z) = f_{xyyyyz}(x, y, z)$

$(D^\alpha f)(x, y, z) = f_{xyyzzz}(x, y, z)$

$(D^\alpha f)(x, y, z) = f_{yyyyzxx}(x, y, z)$

- Bestimmen Sie alle Multiindizes $\beta \in \mathbb{N}_0^3$ mit $|\beta| = 2$ und geben Sie jeweils $\beta!$ an.

- Sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ eine 2-mal stetig partiell differenzierbare Funktion. Was wäre zum Beispiel das Ergebnis von $\sum_{|\beta|=2} \frac{1}{\beta!} (D^\beta f)(x, y, z)$? Kreuzen Sie die richtige Antwort an:

$\frac{1}{2} f_{xx}(x, y, z) + f_{xy}(x, y, z) + f_{xz}(x, y, z) + \frac{1}{2} f_{yy}(x, y, z) + f_{yz}(x, y, z) + \frac{1}{2} f_{zz}(x, y, z)$

$\frac{1}{2} f_{xx}(x, y, z) + \frac{1}{2} f_{xy}(x, y, z) + \frac{1}{2} f_{xz}(x, y, z) + \frac{1}{2} f_{yy}(x, y, z) + \frac{1}{2} f_{yz}(x, y, z) + \frac{1}{2} f_{zz}(x, y, z)$

Lösung: (a,b,d: 2 Punkte; c,e: jedes richtige 0.5 Punkte, jedes falsche -0.5 Punkte. Komplette Aufgabe ≥ 0 Punkte)

- (a) $|\alpha| = 1 + 4 + 2 = 7$ und $\alpha! = 1! \cdot 4! \cdot 2! = 48$.
 (b) $h^\alpha = 0.5^1 \cdot 2^4 \cdot 3^2 = 72$.
 (c) (siehe oben). Hinweis: Nach dem Satz von Schwarz ist es gleichgültig, in welcher Reihenfolge man die partiellen Ableitungen bestimmt.
 (d) $\beta \in \{(2, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 2, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 2)\}$ und die Fakultäten sind:

$$(2, 0, 0)! = (0, 2, 0)! = (0, 0, 2)! = 2! 0! 0! = 2$$

und

$$(1, 1, 0)! = (1, 0, 1)! = (0, 1, 1)! = 1! 1! 0! = 1$$

- (e) (siehe oben)

Aufgabe H40 (Taylorentwicklung)

(6 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorentwicklung der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = e^{2x} \sin(x + 2y)$$

im Punkt $(0, 0)$ bis einschließlich der Glieder 2. Ordnung. Berechnen Sie eine Näherung für $f(0.1, 0.1)$.

Lösung: Die nötigen partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} D^{(1,0)} f(x, y) &= f_x(x, y) = 2e^{2x} \sin(x + 2y) + e^{2x} \cos(x + 2y) \\ D^{(0,1)} f(x, y) &= f_y(x, y) = 2e^{2x} \cos(x + 2y) \\ D^{(2,0)} f(x, y) &= f_{xx}(x, y) = 3e^{2x} \sin(x + 2y) + 4e^{2x} \cos(x + 2y) \\ D^{(0,2)} f(x, y) &= f_{yy}(x, y) = -4e^{2x} \sin(x + 2y) \\ D^{(1,1)} f(x, y) &= f_{xy}(x, y) = 4e^{2x} \cos(x + 2y) - 2e^{2x} \sin(x + 2y) . \end{aligned}$$

Am Entwicklungspunkt $(0, 0)$ erhalten wir somit:

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= 0, \quad D^{(1,0)} f(0, 0) = 1, \quad D^{(0,1)} f(0, 0) = 2 \\ D^{(2,0)} f(0, 0) &= 4, \quad D^{(0,2)} f(0, 0) = 0, \quad D^{(1,1)} f(0, 0) = 4 . \end{aligned}$$

Die Glieder der Taylorreihe bis zur 2. Ordnung sind:

$$\begin{aligned} &\sum_{|\alpha| \leq 2} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(0, 0) ((x_1, x_2) - (0, 0))^\alpha \\ &= f(0, 0) + D^{(1,0)} f(0, 0)(x - 0) + D^{(0,1)} f(0, 0)(y - 0) \\ &\quad + D^{(1,1)} f(0, 0)(x - 0)(y - 0) + \frac{1}{2} D^{(2,0)} f(0, 0)(x - 0)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} D^{(0,2)} f(0, 0)(y - 0)^2 \\ &= x + 2y + 4xy + 2x^2 . \end{aligned}$$

Damit ist die Näherung:

$$\frac{1}{10} + 2 \frac{1}{10} + 4 \frac{1}{100} + 2 \frac{1}{100} = \frac{3}{10} + \frac{6}{100} = 0,36 .$$

Aufgabe H41 (Extremwertbestimmung)

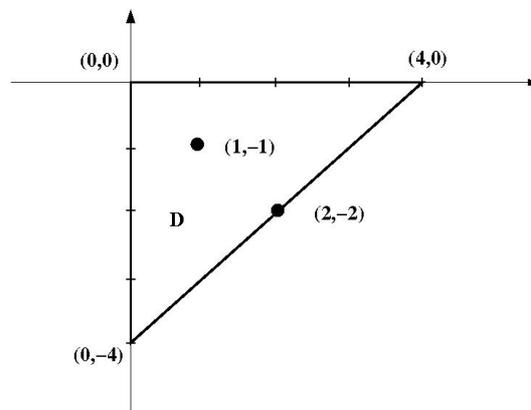
(1+4+4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = e^{xy+x-y}$$

innerhalb des abgeschlossenen Dreiecks D mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(4, 0)$ und $(0, -4)$.

- Skizzieren Sie den Definitionsbereich und tragen Sie nachfolgende Ergebnisse ein.
- Untersuchen Sie die Funktion auf etwaige lokale Extremalstellen oder Sattelpunkte im Innern von D und bestimmen Sie deren Typ.
- Diskutieren Sie das Verhalten von f auf dem Rand von D und ermitteln Sie die globalen Extremalstellen von f auf ganz D .

Lösung: Skizze:

Den Gradienten nullsetzen:

$$(\text{grad } f)(x, y) = e^{xy+x-y} \begin{pmatrix} y+1 \\ x-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies (x, y) = (1, -1) \in D.$$

Klassifizieren mittels zweiter Ableitungen:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= (y+1)^2 e^{xy+x-y}, \\ f_{xy}(x, y) &= (xy+x-y) e^{xy+x-y}, \\ f_{yy}(x, y) &= (x-1)^2 e^{xy+x-y}. \end{aligned}$$

Die Hesse-Matrix

$$(\text{Hess } f)(1, -1) = \begin{pmatrix} 0 & e \\ e & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte der Matrix $(\text{Hess } f)(1, -1)$ sind $\pm e$. Also ist die Hesse-Matrix nicht definit, der Punkt $(1, -1)$ ist ein Sattelpunkt. Untersuchung auf dem Rand:

$$f(x, 0) = e^x, \quad \text{monoton wachsend f\u00fcr } x \in [0, 4].$$

$$f(0, y) = e^{-y}, \quad \text{monoton wachsend f\u00fcr } y \in [0, -4].$$

$$f(x, x-4) = e^{(x-2)^2}, \quad \text{zu untersuchen f\u00fcr } x \in [0, 4]:$$

$$\frac{d}{dx} f(x, x-4) = 2(x-2) e^{(x-2)^2} = 0 \implies (x, y) = (2, -2) \in \partial D.$$

Wertevergleich zeigt: absolute Minima bei $(0, 0)$ und $(2, -2)$ (Funktionswert gleich 1), absolute Maxima bei $(4, 0)$ und $(0, -4)$ (Funktionswert gleich e^4).

Aufgabe H42 (Methode von Lagrange)

(5 Punkte)

Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & f(x, y) &= e^{x+3y}, \\ g : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & g(x, y) &= x^2 + y^2 - 10. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$.

Lösung: Lagrange-Funktion:

$$L(x, y, \lambda) = e^{x+3y} + \lambda(x^2 + y^2 - 10).$$

Ihre Ableitungen:

$$\begin{aligned} L_x(x, y, \lambda) &= e^{x+3y} + 2\lambda x \stackrel{!}{=} 0, \\ L_y(x, y, \lambda) &= 3e^{x+3y} + 2\lambda y \stackrel{!}{=} 0, \\ L_\lambda(x, y, \lambda) &= x^2 + y^2 - 10 \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Aus den ersten zwei Gleichungen folgt $6\lambda x = 2\lambda y$, also $y = 3x$, da $\lambda = 0$ zu einem Widerspruch führt. Mit der dritten Gleichung erhält man $x^2 = 1$, also

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 & y_1 &= 3, \\ x_2 &= -1 & y_2 &= -3. \end{aligned}$$

Weiterhin ist $f(x_1, y_1) = e^{10}$ (Maximum), $f(x_2, y_2) = e^{-10}$ (Minimum).

Man beachte dabei: Zunächst weiß man nur, dass die berechneten Paare (x_1, y_1) und (x_2, y_2) die einzigen *möglichen* lokalen Extremstellen sind. Dass es wirklich welche sind, kann man beispielsweise so begründen: Die Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ beschreibt einen Kreis K . Dieser ist kompakt, sodass die stetige Funktion f auf K ein Maximum und Minimum annehmen *muss*.

Abgabe der Hausübungen: Am Freitag den 17. Juli 2009 vor der Übung.

(Hinweise auf Fehler bei diesen Aufgaben bitte an Michael Klotz, kl...@math...tik.tu-darmstadt.de)