Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
Tobias Hansel
René Hartmann
Michael Klotz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 09 3.7.2009

Mathematik II für ET, WI(ET), SpoInf, IST, BEd.ET, CE

12. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 41) (Bilinearformen)

Gegeben sei ein 2-dimensionaler reeller Vektorraum mit einer orthonormal Basis α. Bezüglich dieser Basis α sind die folgenden Funktionen $\Phi_i : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, 3)$ gegeben:

(i) $\Phi_1(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_2 + 3x_2y_1$

(ii) $\Phi_2(\vec{x}, \vec{y}) = x_1x_2 + y_1y_2$

(iii) $\Phi_3(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_2 - 2x_2y_1$

Begründen Sie, ob es sich jeweils um eine Bilinearform handelt und geben Sie gegebenenfalls die Gram-Matrix bezüglich der Basis α an.

LÖSUNG: (i) Die Funktion Φ_1 ist eine Bilinearform, denn mit $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ gilt

$$\begin{aligned}
\Phi_1(\vec{a} + \vec{b}, \vec{y}) &= 2(a_1 + b_1)y_2 + 3(a_2 + b_2)y_1 = 2a_1y_2 + 3a_2y_1 + 2b_1y_2 + 3b_2y_1 \\
&= \Phi_1(\vec{a}, \vec{y}) + \Phi_1(\vec{b}, \vec{y}), \\
\Phi(\vec{x}, \vec{a} + \vec{b}) &= 2x_1(a_2 + b_2) + 3x_2(a_1 + b_1) = 2x_1a_2 + 3x_2a_1 + 2x_1b_2 + 3x_2b_1 \\
&= \Phi_1(\vec{x}, \vec{a}) + \Phi_1(\vec{x}, \vec{b}),
\end{aligned}$$

und $\Phi_1(\lambda\vec{x}, \vec{y}) = \lambda\Phi_1(\vec{x}, \vec{y})$ sowie $\Phi_1(\vec{x}, \mu\vec{y}) = \mu\Phi_1(\vec{x}, \vec{y})$. Die zugehörige Gram-Matrix ist gerade $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

(ii) Die Funktion Φ_2 ist keine Bilinearform, denn mit $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ gilt

$$\begin{aligned}
\Phi_2(\vec{a} + \vec{b}, \vec{y}) &= (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) + y_1y_2 = a_1a_2 + b_1b_2 + y_1y_2 + a_1b_2 + a_2b_1 \\
&= \Phi_2(\vec{a}, \vec{y}) + \Phi_2(\vec{b}, \vec{y}) + a_1b_2 + a_2b_1 \neq \Phi_2(\vec{a}, \vec{y}) + \Phi(\vec{b}, \vec{y}).
\end{aligned}$$

(iii) Die Funktion Φ_3 ist eine Bilinearform. Zeigt man analog zu (i). Die Gram Matrix ist gerade $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

(G 42) (Hauptachsentransformation)

In der Ebene sei eine quadratische Form Q bezüglich einer orthonormal Basis α durch $Q(\vec{x}) = 3x_1^2 + 4x_1x_2$ gegeben. Führen Sie für diese Form eine Hauptachsentransformation durch. Gehen sie folgendermaßen vor:

(a) Geben Sie die Gram-Matrix der zugehörigen Bilinearform Φ an.

(b) Wir suchen nun eine orthonormal Basis $\beta = \{\vec{v}, \vec{w}\}$, so dass die Gram-Matrix der Bilinearform Φ bezüglich der Basis β diagonal ist, d.h. $\Phi(\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}^\alpha)^t A \vec{w}^\alpha = 0$. Machen Sie dafür den Ansatz $\vec{v}^\alpha = (v_1, v_2)^t$, $\vec{w}^\alpha = (-v_2, v_1)^t$ (dieser Ansatz garantiert gerade, dass $\vec{v}$ und $\vec{w}$ orthogonal sind) und gewinnen Sie daraus eine quadratische Gleichung für die Koordinaten v_1, v_2 von v bezüglich α.

(c) Lösen Sie diese Gleichung. Tipp: Leiten Sie eine Gleichung für $t = \frac{v_2}{v_1}$ her und lösen Sie diese. Verifizieren Sie ihr Ergebnis.

(d) Geben Sie ein Hauptachsensystem β bezüglich der Basis α an und zeichnen Sie dieses ein.

(e) Bestimmen Sie die Hauptmomente λ_1, λ_2 und geben Sie die Form im Hauptachsensystem an.

(f) Zeichnen Sie die Höhenlinien zur Höhe 1 ein.

(g) Hat Q an der Stelle 0 ein lokales Minimum oder Maximum? Wo hat Q auf der Menge $\{\vec{x} : \|\vec{x}\| = 1\}$ ein Maximum bzw. Minimum?

Lösung: (a)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Mit dem angebenen Ansatz erhalten wir

$$(v_1, v_2) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} = -3v_2v_1 + 2v_1^2 - 2v_2^2 = 0.$$

(c) Wir nehmen an, dass $v_1 \neq 0$ und teilen die Gleichung durch v_1^2. Mit der angegebenen Substitution erhalten wir

$$-3t + 2 - 2t^2 = 0.$$

Umformen führt zu

$$t^2 + \frac{3}{2}t - 1 = 0.$$

Lösen ergibt $t_1 = -2$, $t_2 = \frac{1}{2}$. Erinnern wir uns, wie wir t ursprünglich eingeführt haben, so erhalten wir $\frac{v_2}{v_1} = -2$; wählen wir $v_1 = 1$, so erhalten wir die Vektoren $\vec{v} = (1, -2)^t$ und $\vec{x} = (2, 1)^t$. Wir verifizieren: $\vec{v}^t A \vec{w} = 0$.

(d) Normieren der Vektoren $\vec{v}$, $\vec{w}$ führt zu

$$\vec{v}' = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2)^t, \qquad \vec{w}' = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)^t.$$

Das Zeichnen des Hauptachsensystems sollte an dieser Stelle kein Problem mehr sein: Wir zeichnen die beiden angegebenen Vektoren $\vec{v}'$ und $\vec{w}'$ als normierte Basisvektoren in ein Koordinatensystem der ONB α ein. Die Hauptachsensind gerade die von $\vec{v}'$ und $\vec{w}'$ aufgespannten Geraden.

(e) Als Transformationsbasis von der neuen Basis β in die alte Basis α erhalten wir

$$T := {}^\alpha T_\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Transformationsbasis von der alten Basis α in die neue Basis β ist gerade ${}^\beta T_\alpha = T^t$. Wir erhalten also die quadratische Form im Hauptachsensystem β durch

$$A' = T^t A T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Die Hauptmomente sind also $\lambda = -1$ und $\mu = 4$. Im Hauptachsensystem hat die Form also die Gestalt

$$Q(\vec{y}) = -1y_1^2 + 4y_2^2.$$

(f) Die Höhenlinie zur Höhe 1 ist gerade eine Hyperbel.

(g) Da die Hauptmomente -1 und 4 sind, liegt nach Korollar 27.2 weder ein Maximum noch ein Minimum an der 0 vor. Nach Korollar 27.3 ist das Maximum unter der Nebenbedingung $\|\vec{x}\| = 1$ gerade der größte Hauptmoment, also 4, und es wird somit für den Vektor $\vec{w}' = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)^t$ angenommen. Analog ist das Minimum unter der Nebenbedingung $\|\vec{x}\| = 1$, der kleinste Hauptmoment, also -1, und es wird für den Vektor $\vec{v}' = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2)^t$ angenommen.

(G 43) (Symmetrischer Gauß)

Es sei Φ eine Bilinearform mit Gram-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix S mit SAS^t diagonal. Ist die zu Φ gehörige quadratische Form Q positiv oder negativ definit?

Lösung: Es sei $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist $A' = S_1 A S_1^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Es sei $S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist $A'' = S_2 A' S_2^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Daraus kann man schließen, dass alle Hauptmomente positives Vorzeichen haben. Also ist die quadratische Form Q positiv definit.

Hausübungen

(H 36) (Quadratische Form I; 1+2+2+1 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 3 \\ b & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die zu A gehörige quadratische Form $Q_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

(b) Wählen Sie nun $b = 2$ und entscheiden Sie, für welche Werte des reellen Parameters a die Matrix A positiv definit ist.

(c) Zeigen Sie, dass A nicht negativ definit sein kann.

(d) Geben Sie geeignete Werte für die Parameter a und b an, so dass A indefinit ist.

Lösung: (a) Zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 3 \\ b & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

gehört dann die *quadratische Form* $Q_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit der Zuordnungsvorschrift

$$Q_A(x) = ax_1^2 + 8x_2^2 + 6x_3^2 + 2bx_1x_2 + 6x_1x_3 + 8x_2x_3.$$

(b) Wir setzen $b = 2$ und betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A ist genau dann positiv definit, wenn die führenden Hauptunterdeterminanten (*Hauptminoren*) von A positiv sind. Wegen

$$\begin{aligned}
D_1 &= \det(a) = a \overset{!}{>} 0 && \Leftrightarrow \quad a > 0 \\
D_2 &= \begin{vmatrix} \text{a} & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 8a - 4 \overset{!}{>} 0 && \Leftrightarrow \quad a > \frac{1}{2} \\
D_3 &= \begin{vmatrix} \text{a} & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 32a - 48 \overset{!}{>} 0 && \Leftrightarrow \quad a > \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

ist A für alle $a > \frac{3}{2}$ *positiv definit.*

(c) De Matrix A ist negativ definit, wenn die Matrix

$$-A = \begin{pmatrix} -a & -b & -3 \\ -b & -8 & -4 \\ -3 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

positiv definit ist, was genau dann der Fall ist, wenn alle Hauptunterdeterminanten von $-A$ positiv sind. Nun gilt aber

$$D_1 = \det(-a) = -a \overset{!}{>} 0 \qquad \Leftrightarrow \quad a < 0$$

und

$$D_2 = \begin{vmatrix} \text{-a} & \text{-b} \\ \text{-b} & \text{-8} \end{vmatrix} = 8a - b^2 \overset{!}{>} 0 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 < 8a,$$

weshalb die Ungleichung

$$b^2 < 0$$

folgt, die für kein $b \in \mathbb{R}$ erfüllt ist. Somit können die Parameter a und b *nicht* so gewählt werden, daß A negativ definit ist.

(d) Wir setzen $a = 1$ und $b = 6$ und betrachten die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 6 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

deren zugehörige quadratische Form $Q_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch die Zuordnungsvorschrift

$$Q_A(x) = x_1^2 + 8x_2^2 + 6x_3^2 + 12x_1x_2 + 6x_1x_3 + 8x_2x_3$$

erklärt ist. Für $x = (1, 0, 0)^T$ ist dann

$$Q_A(x) = 1 > 0$$

und für $x = (1, -\frac{1}{2}, 0)^T$ folgt

$$Q_A(x) = -3 < 0$$

und somit ist A für diese Parameterwahl *indefinit.*

(H 37) (Quadratische Form II; 3 Punkte)

Betrachten Sie die quadratische Form $Q_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit der Zuordnungsvorschrift

$$Q_A(\vec{x}) = 7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3.$$

Geben Sie die Gram-Matrix A der zugehörigen Bilinearform an und entscheiden Sie, ob A positiv oder negativ definit ist.

LÖSUNG: Die zur quadratischen Form Q_A gehörige Gram-Matrix lautet

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Um zu zeigen, dass A positiv definit ist, genügt es nachzuweisen, dass die *Hauptunterdeterminanten*

$$D_i = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix}$$

für $i = 1, 2, 3$ positiv sind. Wir erhalten

$$\begin{aligned} D_1 &= \det(7) = 7 > 0 \\ D_2 &= \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 38 > 0 \\ D_3 &= \begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 162 > 0 \end{aligned}$$

und somit ist A *positiv definit*.

(H 38) (Hauptachsentransformation; 2+4+3+3 Punkte)

Im Raum sei eine orthonormal Basis α und die quadratische Form Q gegeben, so dass bezüglich der Koordinaten von α

$$Q(\vec{x}) = -\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + 2x_3^2 + x_1x_2$$

gilt. Bestimmen Sie ein Hauptachsensystem von Q. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

(a) Zeigen Sie, dass für den Vektor $\vec{v}_1 = (0, 0, 1)^t$ die quadratische Form $Q(\vec{x})$ ihr Maximum unter der Nebenbedingung $\|\vec{x}\| = 1$ annimmt.

(b) Betrachten Sie die Einschränkung Q' von Q auf den Unterraum der von $\vec{v}_2 = (1, 0, 0)^t$ und $\vec{v}_3 = (0, 1, 0)^t$ aufgespannt wird:

$$Q'(x_1, x_2) = -\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + x_1x_2.$$

Geben Sie für Q' ein Hauptachsensystem an (Gehen Sie wie in Aufgabe G42 vor). Bestimmen Sie die Hauptmomente von Q' und zeichnen Sie die Höhenlinien von Q' zur Höhe 1.

(c) Geben Sie nun das Hauptachsensystem und die Hauptmomente von Q an.

(d) Bestimmen Sie den Definitheitstyp sowie den Flächentyp der Kennfläche der Form.

LÖSUNG: (a) Es gilt $0 \geq -\frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 = -\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + x_1 x_2$, also $Q(\vec{x}) \leq 2x_3^2 \leq 2$, wenn wir fordern, dass $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, gelten muss; andererseits gilt $Q(\vec{v}_1) = 2$. Damit folgt die Behauptung.

(b) Um ein Hauptachsensystem von Q' zu bestimmen gehen wir wie in Aufgabe $G43$ vor: Die zu Q gehörige Gram-Matrix ist $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Mit dem Ansatz $\vec{v} = (v_1, v_2)^t$, $\vec{w} = (-v_2, v_1)$ erhalten wir die Gleichung

$$-\frac{1}{2}v_2^2 + \frac{1}{2}v_1^2 = 0.$$

Nehmen wir an, dass $v_1 \neq 0$ und teilen diese Gleichung durch v_1. Mit der Substitution $t = \frac{v_2}{v_1}$ erhalten wir die Gleichung

$$-\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2} = 0.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist $t = \pm 1$. Daraus folgt $v_1 = v_2$. Also $\vec{v} = (1,1)^t$ und $\vec{x} = (-1,1)^t$. Normieren wir diese beiden Vektoren noch, dann wird das Hauptachsensystem von den Vektoren

$$\vec{v}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^t, \qquad \vec{w}' \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)^t$$

aufgespannt. Es gilt $Q'(\vec{v}') = 0$ und $Q'(\vec{w}') = -1$. Die Hauptmomente der quadratischen Form Q' sind also 0 und -1. Die Höhenlinien zur Höhe 1 sind gerade zwei parallele Gerade mit $x_2 = \pm 1$.

(c) Als Hauptachsensystem für Q wählen wir nun $\vec{v}_1 = (0,0,1)^t$, $\vec{v}_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^t$ und $\vec{v}_3' \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^t$. Die Hauptmomente sind $2, 0, -1$.

(d) Von den Hauptmomenten kann man ablesen, dass die quadratische Form indefinit ist. Wie im Skript angegeben ist die Kennfläche der Form ein hyperbolischer Zylinder.