**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. C. Herrmann
Tobias Hansel
René Hartmann
Michael Klotz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 09 26.6.2009

# Mathematik II für ET, WI(ET), SpoInf, IST, BEd.ET, CE

## 11. Übung mit Lösungshinweisen

## Gruppenübungen

### (G 37) (Eigenwerte & Eigenvektoren geometrisch)

Sei $a \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und $\alpha \in [0, 2\pi)$. Bezeichne $\varphi$ die lineare Abbildung, die eine Drehung um den Vektor $a$ mit dem Winkel $\alpha$ darstellt. Sei $E_a = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid a^T x = 0\}$ die durch den Normalenvektor $a$ definierte Ebene und $\psi$ die lineare Abbildung, die eine Spiegelung an jener beschreibt.
Geben Sie die reellen Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren von $\varphi$ und $\psi$ an. Verzichten Sie dabei auf eine explizite Berechnung der darstellenden Matrizen, sondern schließen Sie dies aus geometrischen Überlegungen.

LÖSUNG: In Abhängigkeit von $\alpha$ werden drei Fälle unterschieden:

*1. Fall ($\alpha = 0$):* In diesem Fall ist $\varphi$ die Identität. Daher gilt für alle $x \in \mathbb{R}^3$ $\varphi(x) = x$. Das heißt 1 ist der einzige Eigenwert von $\varphi$ und $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ist die Menge der dazugehörigen Eigenvektoren.

*2. Fall ($\alpha = \pi$):* Vektoren, die parallel zu $a$ sind, bleiben durch die Drehung unverändert. Daher ist $\{\mu a \mid \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ die Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert 1.

Jeder zu $a$ orthogonale Vektor wird auf den Vektor, der genau in die entgegengesetzte Richtung zeigt, abgebildet. Seien $x$ und $y$ zwei linear unabhängige und zu $a$ orthogonale Vektoren. Dann ist $\{\mu x + \nu y \mid \mu, \nu \in \mathbb{R}\} \setminus \{0\}$ die Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert $-1$.

*3. Fall ($\alpha \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$):* Vektoren, die parallel zu $a$ sind, bleiben durch die Drehung unverändert. Daher ist die Menge $\{\mu a \mid \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ die Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert 1.

Alle übrigen Vektoren werden nicht auf ein Vielfaches ihrer selbst abgebildet. Daher besitzt $\varphi$ keine weiteren Eigenwerte und Eigenvektoren.

Für $\psi$ gilt, daß alle Vektoren, die in der Ebene $E_a$ liegen, durch die Spiegelung nicht verändert werden. Daher ist $E_a \setminus \{0\}$ die Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert 1.

Jeder Vektor der parallel zu $a$ ist (und damit senkrecht auf der Ebene $E_a$ steht), wird auf den Vektor, der in die entgegengesetzte Richtung zeigt, abgebildet. Daher ist $\{\mu a \mid \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ die Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert $-1$

### (G 38) (Eigenwerte & Eigenvektoren)

Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von $A$.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren.

(c) Geben Sie eine Diagonalmatrix $D$ und eine Matrix $S$ an, so dass $S^{-1}AS = D$ gilt.

LÖSUNG: (a)

$$\det(A-\lambda E) = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -3 & -3 \\ -2 & -1-\lambda & -2 \\ 2 & 3 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -3 & -3 \\ -2 & -1-\lambda & -2 \\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (-1-\lambda)\cdot((-1-\lambda)(2-\lambda)+2(2-\lambda)) + 2\cdot(-3(2-\lambda)+3(2-\lambda))$$
$$= -(2-\lambda)(1+\lambda)(1-\lambda).$$

Also ist $P_A(\lambda) = (1+\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)$.

(b) Die Eigenwerte von $A$ sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, also $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$.

Die zu $\lambda_i$ gehörenden Eigenvektoren ergeben sich als Lösung der Gleichungssysteme $(A - \lambda_i E)v_i = 0$, $i = 1,2,3$. Zu beachten ist noch, dass der Nullvektor per Definition nie ein Eigenvektor ist.

$\underline{\lambda_1 = -1}$: In diesem Fall ist $(A+E)v_1 = 0$ zu lösen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Also ist

$$v_1 = \mu\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

$\underline{\lambda_2 = 1}$: Hier ist $(A-E)v_2 = 0$ zu lösen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -3 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Somit

$$v_2 = \mu\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

$\underline{\lambda_3 = 2}$: Jetzt ist $(A-2E)v_3 = 0$ zu betrachten.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Also

$$v_3 = \mu\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

(c) Es gilt $S^{-1}AS = D$ für

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**(G 39) (Bestimmung einer Jordannormalform)**

Betrachten Sie die Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte (mit algebraischer und geometrischer Vielfachheit) sowie die Eigenvektoren von $B$.

(ii) Wie muss die Jordannormalform von $B$ aussehen? (Dies können Sie aus (i) schließen)

(iii) Kann man den Eigenvektor $(1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ zu einer Jordankette der Länge 2 ergänzen?

(iv) Was wäre eine bessere Vorgehensweise, um eine Jordankette der Länge 2 zum Eigenwert 1 zu bestimmen? Schreiben Sie dazu hin, was für zwei Vektoren $v_1, v_2$ gelten muss, damit $v_1, v_2$ eine Jordankette bilden. Geben Sie dann eine solche Jordankette $v_1, v_2$ an.

(v) Ergänzen Sie nun $v_1, v_2$ durch einen linear unabhängigen Eigenvektor zu einer Basis $\{v_1, v_2, v_3\}$ und geben Sie die Matrix $B$ bezüglich dieser Basis an.

Lösung: (i) Das charakteristische Polynom ist durch

$$p_B(\lambda) = (1 - \lambda)^3$$

gegeben. Der einzige Eigenwert ist somit 1 mit algebraischer Vielfachheit drei. Um die Eigenvektoren zu bestimmen betrachten wir

$$\ker(B - E) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten also zwei linear unabhängige Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Somit hat der Eigenwert 1 geometrische Vielfachheit zwei.

(ii) Aus der algebraischen und geometrischen Vielfachheit lässt sich schließen, dass die Jordannormalform von $B$ folgendermaßen aussieht: $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(iii) Um den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu einer Jordankette der Länge zwei zu ergänzen, müssen wir einen Vektor $v_2$ bestimmen, so dass $(B - E)v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt. Diese Gleichung besitzt allerdings keine Lösung, also kann man $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht zu einer Jordankette der Länge zwei ergänzen.

(iv) Wir suchen zwei Vektoren $v_1, v_2$ so, dass $v_1$ ein Eigenvektor ist und $(B - E)v_2 = v_1$ gilt. Eine bessere Vorgehensweise als in (iii) ist mit einem Vektor $v_2$ zu starten, der kein Eigenvektor ist, z.B. $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.Dann berechnen wir $v_1 = (B - E)v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Der Vektor $v_1$ ist nun ein Eigenvektor und wir haben eine Jordankette $v_1, v_2$ gefunden.

(v) Wir ergänzen $v_1, v_2$ durch einen linear unabhängigen Eigenvektor, z.B. $v_3 = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$, und erhalten eine Basis $v_1, v_2, v_3$. Bezüglich dieser neuen Basis ist $B$ nun in Jordannormalform gegeben, d.h.

$$J = S^{-1}BS = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**(G 40) ( Jordannormalform)**

Geben Sie reelle Matrizen $A_i$ in Jordannormalform mit den folgenden Eigenschaften an:

(a) $A_1$ hat Eigenwert 1 mit algebraischer Vielfachheit 3 und geometrischer Vielfachheit 1.

(b) $A_2$ hat Eigenwert $-1$ mit algebraischer Vielfachheit 3 u. geometrischer Vielfachheit 2.

(c) $A_3$ hat Eigenwert 2 mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1 und Eigenwert $-2$ mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1.

LÖSUNG: Aus den Vielfachheiten der Eigenwerte lassen sich die folgenden Informationen über die Jordanblöcke ablesen:

- Die Summe der algebraischen Vielfachheiten muss gleich der Raumdimension sein, damit eine Jordannormalform existiert.
- Die algebraische Vielfachheit ist die Summe der Größen der Jordanblöcke zum entsprechenden Eigenwert.
- Die geometrische Vielfachheit ist die Anzahl der Jordanblöcke zum entsprechenden Eigenwert.

Mögliche Lösungen sind somit:

(a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(b) $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

(c) $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$

## Hausübungen

**(H 33) (Eigenwerte & Eigenvektoren; 3+3 Punkte)**

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(x) = Bx$ mit

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ist eine Drehung um eine Achse. Bestimme die Richtung der Drehachse und den Drehwinkel.

LÖSUNG: (a) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2-\lambda & 3 \\ 3 & -2-\lambda & 3 \\ 6 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}$

$= (-2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(4-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

$= (-2-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda-3) = (-2-\lambda)^2(4-\lambda)$

Also sind $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 4$ Eigenwerte.

Eigenvektoren zu $\lambda_1 = -2$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{I+(-II), III+(-2II)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Alle Vektoren der Form $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \cdot \mu \neq 0$, sind Eigenvektoren.

Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 4$:

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{I+(-III), II+(-III)} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Setze $x_2 = \lambda \Rightarrow x_3 = 2\lambda$ und $x_1 = \lambda$.

Also sind alle Vektoren der Form $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, Eigenvektoren.

(b) Bei einer Drehung sind die Vektoren der Drehachse dadurch ausgezeichnet, dass sie durch die Drehung nicht verändert werden, dass also $Bx = x$ gilt. D.h. $x$ ist Eigenvektor zum Eigenwert 1. Wir bestimmen diese Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{3}-\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3}-1 & \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3}-\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{4II, III+4I} \begin{pmatrix} \sqrt{3}-2 & \sqrt{2} & -\sqrt{3}+2 \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{3}-4 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{I+(\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{2}})} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}(8-4\sqrt{3}) & 0 \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{3}-4 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist $(1,0,1)^T$ ein solcher Eigenvektor und damit ist $(1,0,1)^T$ die Richtung der Drehachse. Um den Drehwinkel zu bestimmen, bilden wir einen zur Drehachse senkrechten Vektor. z.B. $x = (0,1,0)^T$ mit der Drehung ab. Es gilt

$$Bx = B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

und der Winkel $\alpha$ zwischen $x$ und $Bx$ ist der Drehwinkel:

$$\cos(\alpha) = \frac{x \cdot Bx}{||x|| \cdot ||Bx||} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1 \cdot 1} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

also gilt $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

## (H 34) (Jordannormalform; 2+2+2 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils eine Jordannormalform $J$ der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Aus den jeweiligen algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte, lässt sich auf die jeweilige Jordannormalform schließen.

Die Matrix $A$ ist eine obere Dreiecksmatrix. Folglich stehen die Eigenwerte auf der Diagonalen. Der einzigste Eigenwert ist 0 mit algebraischer Vielfachheit drei. Um die geometrische Vielfachheit zu bestimmen betrachten wir

$$\ker A = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und sehen, dass $\dim \ker A = 1$ gilt. Also ist die geometrische Vielfachheit eins. Die Jordannormalform besteht also aus einem Jordanblock der Größe drei, d.h.

$$J_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist eine Jordannormalform von $A$.

Für das charakteristische Polynom von $B$ gilt

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} &= -\lambda(1-\lambda)(-\lambda) - (1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 1) \\ &= (1-\lambda)^2(1+\lambda) \end{aligned}$$

Folglich besitzt $B$ die Eigenwerte 1 mit der algebraischen Vielfachheit zwei und $-1$ mit der algebraischen Vielfachheit eins. Wir bestimmen nun die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes 1:

$$\ker(B - E) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{I+III}{=} \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ t \\ s \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die geometrische Vielfachheit ist also zwei, d.h. wir erhalten zwei linear unabhängige Eigenvektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 2. Also ist $B$ diagonalisierbar und

$$J_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist eine Jordannormalform von $B$.

Für das charakteristische Polynom von $C$ gilt

$$\begin{aligned} p_C(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-\lambda(2-\lambda)+1) = (2-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+1) \\ &= (2-\lambda)(\lambda-1)^2. \end{aligned}$$

Folglich besitzt $C$ die Eigenwerte 1 mit der algebraischen Vielfachheit zwei und 2 mit der algebraischen Vielfachheit eins.

Bestimmen wir nun die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes 1:

$$\ker(C-E) = \ker\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{III-II}{=} \ker\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ s \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes 1 ist eins, also besitzt die Jordannormalform von $C$ ein Jordanblock der Größe zwei zum zum Eigenwert 1. Somit ist

$$J_C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Jordannormalform von $C$.

### (H 35) (Jordannormalform; 2+2+2 Punkte)

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ besitze die Eigenwerte 1 und $-1$. Geben Sie eine Jordannormalform von $A$ an für den Fall, dass

(i) die algebraische Vielfachheit sowie die geometrische Vielfachheit beider Eigenwerte zwei ist,

(ii) die algebraische sowie die geometrische Vielfachheit vom Eigenwert 1 eins ist und die algebraische Vielfachheit vom Eigenwert $-1$ drei und die geometrische zwei ist,

(iii) die algebraische sowie die geometrische Vielfachheit vom Eigenwert 1 eins ist und die algebraische Vielfachheit vom Eigenwert $-1$ drei und die geometrische eins ist.

Lösung: Die Aufgabe geht analog zur G40.

(i) Eine Jordannormalform $J$ von $A$ besitzt zu jedem Eigenwert zwei Jordanblöcke der Größe eins, zum Beispiel

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Eine Jordannormalform $J$ von $A$ besitzt einen Jordanblock zum Eigenwert 1 der Größe eins und zwei Jordanblöcke zum Eigenwert $-1$ der Größe eins bzw. zwei, zum Beispiel

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Eine Jordannormalform $J$ von $A$ besitzt einen Jordanblock zum Eigenwert 1 der Größe eins und einen Jordanblock zum Eigenwert $-1$ der Größe drei, zum Beispiel

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$