Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
Dipl.-Math. Tobias Hansel
Dipl.-Math. Rene Hartmann
Dipl.-Math. Michael Klotz

Technische Universität Darmstadt

SS 2009
19.06.2009

10. Übungsblatt zur „Mathematik II für ET, WI(ET), SpoInf, IkT, IST, CE, Mechatronik“

Gruppenübung

Aufgabe G33 (Fourierreihen und Berechnung von Reihen)

Bezeichne $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, für die $f(x) = x^2$ für alle $x \in [-\pi, \pi]$ gilt.

(a) Skizzieren Sie die Fourierreihe auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$.

(b) Berechnen Sie die Fourierreihe von f.

(c) Konvergiert die Fourierreihe? Wenn ja, wie sieht die Grenzfunktion aus?

(d) Bestimmen Sie mithilfe Ihrer Ergebnisse den Wert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Lösung:

(a) (Skizze)

(b) Da f eine gerade Funktion ist, gilt $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2\pi^2}{3},\\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx \overset{\text{für } n\neq 0}{=} \frac{2}{\pi}\left(\left[x^2\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x\frac{\sin(nx)}{n}\,dx\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[2x\frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2\frac{\cos(nx)}{n^2}\,dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(2\pi\frac{\cos(n\pi)}{n^2} - \left[2\frac{\sin(nx)}{n^3}\right]_0^{\pi}\right)\\
&= 4\frac{(-1)^n}{n^2}.
\end{aligned}$$

Daher lautet die Fourierreihe von f

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

(c) Da f stetig und stückweise stetig differenzierbar ist, konvergiert die Fourierreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen f.

(d) Wegen $f(0) = 0^2 = 0$, gilt also insbesondere:

$$0 = f(0) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Daraus folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Aufgabe G34 (Näherungsweise Gleichheit von Potenzreihen)

(a) Bestimmen Sie für die Potenzreihen $\Phi := \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-10)^k$ und $\Psi := \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(x-10)^k$ mit

$$a_k = \begin{cases} k^2 & \text{für } k < 20 \\ \sin(k) & \text{für } k \geq 20 \end{cases}$$

näherungsweise ($\approx_{10}^3$) Summe und Produkt.

(b) Bestimmen Sie näherungsweise ($\approx_{100}^2$) die Substitution von $\Phi := \sum_{k=0}^{\infty}(1+k)(x-100)^k$ in $\Psi := \sum_{k=0}^{\infty}(x-1)^k$, d. h.

$$\sum_{k=0}^{\infty}(x-1)^k \circ \sum_{k=0}^{\infty}(1+k)(x-100)^k.$$

Anmerkung: Beachten Sie, dass die Substitution nur deshalb definiert ist, weil der Wert der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty}(1+k)(x-100)^k$ für $x = 100$ (also der Koeffiezient vor der Potenz $(x-100)^0$) gerade 1 ist und daher mit dem Entwicklungspunkt der anderen Potenzreihe übereinstimmt.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} \Phi + \Psi &\approx_{10}^3 \sum_{k=0}^{3} k^2(x-10)^k + \sum_{k=0}^{3}(k+2)(x-10)^k \\ &= 2 + 4(x-10) + 8(x-10)^2 + 14(x-10)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi \cdot \Psi &\approx_{10}^3 \sum_{k=0}^{3} k^2(x-10)^k \cdot \sum_{k=0}^{3}(k+2)(x-10)^k \\ &\approx_{10}^3 (0^2 \cdot 2) + (0^2 \cdot 3 + 1^2 \cdot 2)(x-10) + (0^2 \cdot 4 + 1^2 \cdot 3 + 2^2 \cdot 2)(x-10)^2 \\ &\quad +(0^2 \cdot 5 + 1^2 \cdot 4 + 2^2 \cdot 3 + 3^2 \cdot 2)(x-10)^3 \\ &= 2(x-10) + 11(x-10)^2 + 34(x-10)^3 \end{aligned}$$

(b) Wegen $\Phi \approx_{100}^2 \sum_{k=0}^{2}(1+k)(x-100)^k$ und $\Psi \approx_1^2 \sum_{k=0}^{2}(x-1)^k$ haben wir:

$$\begin{aligned} \Psi \circ \Phi &\approx_{100}^2 \sum_{k=0}^{2}(x-1)^k \circ \sum_{k=0}^{2}(1+k)(x-100)^k \\ &= \sum_{k=0}^{2}\Big(\big(\sum_{k=0}^{2}(1+k)(x-100)^k\big) - 1\Big)^k = \sum_{k=0}^{2}\Big(1 + 2(x-100) + 3(x-100)^2 - 1\Big)^k \\ &= 1 + \big(2(x-100) + 3(x-100)^2\big) + \big(2(x-100) + 3(x-100)^2\big)^2 \\ &\approx_{100}^2 1 + 2(x-100) + 3(x-100)^2 + 4(x-100)^2 \\ &= 1 + 2(x-100) + 7(x-100)^2 \end{aligned}$$

Aufgabe G35 (Taylorpolynome von verketteten Funktionen)

Gegeben sei die Funktion $f\colon\,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\,\to\mathbb{R},\ f(x):=\cos(x)$ und die natürliche Logarithmusfunktion ln. Wir berechnen für die verkettete Funktion $x\mapsto\ln(f(x))$ das Taylorpolynom $j_p^n(\ln\circ f)$ vom Grad $n=2$ am Entwicklungspunkt $p=0$ auf zwei verschieden Weisen.

(a) Bestimmen Sie die Koeffizienten a_k in der Formel $j_p^n(\ln\circ f)(x-p)=\sum_{k=0}^n a_k(x-p)^k$ mittels der Ableitungen $a_k=\frac{1}{k!}(\ln\circ f)^{(k)}(p)$.
(Alternative Notation: $j_p^n(\ln\circ f)(t)=\sum_{k=0}^n a_k t^k$.)

(b) Verwenden Sie die Ihnen bereits bekannten Taylorentwicklungen $j_1(\ln)$ und $j_0(f)$ und lösen Sie das Problem mittels Substitution von Potenzreihen, d. h.

$$j_p^n(\ln\circ f)(x-p)\approx_p^n\big(j_q^n(\ln)\circ(j_p^n(f)-q)\big)(x-p)$$

mit $q=f(p)=1$.
alternative Schreibweise: $j_p^n(\ln\circ f)(t)\approx_0^n\big(j_q^n(\ln)\circ(j_p^n(f)-q)\big)(t)$

Lösung:

(a) Berechnen wir die ersten zwei Ableitungen von $\ln\circ f$:

$$\begin{aligned}(\ln\circ f)'(x) &= \frac{1}{\cos(x)}\cdot\cos'(x) = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x),\\ (\ln\circ f)''(x) &\left(= -\frac{\sin'(x)\cos(x)-\sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = -\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\right) = -\frac{1}{\cos^2(x)}.\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich

$$\begin{aligned}a_0 &= \ln(\cos(0)) = \ln(1) = 0,\\ a_1 &= -\tan(0) = 0,\\ a_2 &= -\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{\cos^2(0)} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Folglich haben wir:

$$j_0^2(\ln\circ f)(x-0) = \sum_{k=0}^{2} a_k(x-0)^k = -\frac{1}{2}x^2.$$

(b) Vgl. Skript, S. 108:

$$\begin{aligned}\ln(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n \quad \text{für } x\in\,]0,2],\\ \cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \quad \text{für } x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Die Taylorpolynome vom Grad 2 in den entsprechenden Entwicklungspunkten sind also:

$$\begin{aligned}j_1^2(\ln)(x-1) &= (x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2,\\ \text{bzw. } j_1^2(\ln)(t) &= t-\frac{1}{2}t^2,\\ j_0^2(\cos)(x) &= 1-\frac{1}{2}x^2.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} j_0^2(\ln\circ f)(x-0) &\approx_0^2 \big(j_1^2(\ln)\circ(j_0^2(f)-1)\big)(x-0) \\ &= j_1^2(\ln)(1-\frac{1}{2}x^2-1) \\ &= (-\frac{1}{2}x^2)-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x^2)^2 \approx_0^2 -\frac{1}{2}x^2, \end{aligned}$$

d. h., $j_0^2(\ln\circ f)(x) = -\frac{1}{2}x^2$, denn beachten Sie dabei, dass das Polynom $j_0^2(\ln\circ f)(x)$ nach Definition Grad ≤ 2 hat, sodass wir aus

$$j_0^2(\ln\circ f)(x-0) \approx_0^2 -\frac{1}{2}x^2$$

auch wirklich Gleichheit schließen können.

Aufgabe G36 (Nutzen der gleichmäßigen Konvergenz)

Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^\pi \frac{\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)}{1-e^{-xn}}\,dx.$$

Hinweis: Da man für $\frac{\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)}{1-e^{-xn}}$ nicht ohne weiteres eine Stammfunktion hinschreiben kann, würde man gerne Integration und Grenzwertbildung vertauschen. Dies geht aber nur, wenn gleichmäßige Konvergenz vorliegt, was zunächst nachgewiesen werden muss.

Lösung: Sei $f_n(x) = \frac{\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)}{1-e^{-xn}}$. Dann konvergiert die Funktionenfolge für $x > 0$ offensichtlich punktweise gegen Null.

Zum Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz betrachte man

$$||f_n-0||_\infty = \sup_{x\in[1,\pi]}\left|\frac{\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)}{1-e^{-xn}}-0\right| = \sup_{x\in[1,\pi]}\frac{\left|\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)\right|}{|1-e^{-xn}|}.$$

Für $n > 1$ ist die Funktion $x \mapsto \sin^2\left(\frac{x}{n}\right)$ auf dem Intervall $[1,\pi]$ monoton steigend (und offensichtlich positiv). Daher ist $\left|\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)\right|$ für $x = \pi$ maximal. Die Funktion $x \mapsto 1-e^{-xn}$ ist monoton steigend und auf dem zu betrachtenden Intervall $[1,\pi]$ außerdem positiv, sodass $|1-e^{-xn}|$ auf dem Intervall $[1,\pi]$ für $x = 1$ minimal ist. Folglich gilt

$$\sup_{x\in[1,\pi]}\frac{\left|\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)\right|}{|1-e^{-xn}|} \leq \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1-e^{-n}}.$$

Daraus folgt

$$\lim_{n\to\infty}||f_n-0||_\infty = 0,$$

womit f_n gleichmäßig gegen Eins konvergiert.

Daher gilt

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^\pi \frac{\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)}{1-e^{-xn}}\,dx = \int_1^\pi \lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)}{1-e^{-xn}}\,dx = \int_1^\pi 0\,dx = 0.$$

Hausübung

Aufgabe H31 (Fourierreihen und Berechnung von Reihen) (1+6+2+3 Punkte)

Bezeichne $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, für die

$$f(x) = \begin{cases} \pi & \text{falls } -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{falls } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

gilt.

(a) Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$.

(b) Berechnen Sie die Fourierreihe von f.

(c) Konvergiert die Fourierreihe? Wenn ja, wie sieht die Grenzfunktion aus?

(d) Bestimmen Sie mithilfe Ihrer Ergebnisse den Wert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Lösung:

(a) (Skizze)

(b) Wir berechnen die Koeffizienten der Fourierreihe:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \pi\cos(nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi - x)\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \pi\cos(nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(-x)\cos(nx)\,dx \\
&\overset{\text{für } n\neq 0}{=} \left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos(nx)\,dx \\
&\overset{\text{part. Integr.}}{=} (0-0) - \frac{1}{\pi}\left[x\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}\,dx \\
&= 0 + \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} = -\frac{\cos(n\pi)}{\pi n^2} + \frac{1}{\pi n^2} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{für gerades n} \\ \frac{2}{\pi n^2} & \text{für ungerades n} \end{cases}
\end{aligned}$$

für $n \neq 0$. Wir berechnen a_0 separat:

$$\begin{aligned}
a_0 &\overset{\text{vgl. oben}}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \pi\cos(0x)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(-x)\cos(0x)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\pi\,dx - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot 2\pi^2 - \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\pi^2 = \frac{3}{2}\pi.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\pi\sin(nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\pi\sin(nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(-x)\sin(nx)\,dx \\
&= \left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \left(\frac{1}{\pi}\left[x\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}\,dx\right) \\
&= \left(-\frac{\cos(n\pi)}{n} + \frac{\cos(-n\pi)}{n}\right) + \frac{1}{\pi}\left(\pi\frac{\cos(n\pi)}{n} - 0\right) - \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{\cos(-n\pi)}{n} = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{für gerades } n \\ -\frac{1}{n} & \text{für ungerades } n \end{cases} \\
&= \frac{(-1)^n}{n}.
\end{aligned}$$

Damit ist die Fourierreihe $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ durch

$$\frac{3}{4}\pi + (\frac{2}{\pi}\cos(x) - \sin(x)) + \frac{1}{2}\sin(2x) + (\frac{2}{\pi 3^2}\cos(3x) - \frac{1}{3}\sin(3x)) + \frac{1}{4}\sin(4x) + \dots$$

gegeben. (Wenn man das formal in zwei Reihen schreibt, sieht das mit

$$\frac{3}{4}\pi + \frac{2}{\pi}\left[\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \dots\right] \\ + \left[-\sin(x) + \frac{1}{2}\sin(2x) - \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{4}\sin(4x) + \dots\right]$$

schon übersichtlicher aus.)

(c) Da die Funktion f stückweise stetig differenzierbar ist, konvergiert ihre Fourierreihe. An allen Stetigkeitsstellen von f stimmt die Grenzfunktion mit f überein. An allen Sprungstellen x konvergiert sie gegen $\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}$. Die Sprungstellen sind durch alle $x = \pi + 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ gegeben. An jeder dieser Stellen x ist

$$\frac{f(x_+) + f(x_-)}{2} = \frac{\pi + 0}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Die Fourierreihe von f konvergiert also gegen die 2π-periodische Funktion $\tilde{f}$, für die

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \pi & \text{falls } -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{falls } 0 \le x < \pi \\ \frac{\pi}{2} & \text{falls } x = \pi \end{cases}$$

gilt.

(d) Für $x = 0$ verschwinden in der Fourierreihe alle Sinusterme, während alle Cosinuswerte gleich 1 sind. Damit ergibt sich:

$$\tilde{f}(0) = \frac{3}{4}\pi + \frac{2}{\pi}\left[1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right] = \frac{3}{4}\pi + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Da andererseits $\tilde{f}(0) = \pi$ bekannt ist, erhalten wir

$$\frac{1}{4}\pi = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

und damit dann

$$\frac{1}{8}\pi^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Aufgabe H32 (Taylorpolynome von verketteten Funktionen) (2+3 Punkte)

Wir berechnen für die verkettete Funktion $\cos \circ \ln$ das Taylorpolynom $j_p^n(\cos \circ \ln)$ vom Grad $n = 2$ am Entwicklungspunkt $p = 1$ auf zwei verschieden Weisen.

(a) Bestimmen Sie die Koeffizienten a_k in der Formel $j_p^n(\cos \circ \ln)(x - p) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - p)^k$ mittels der Ableitungen $a_k = \frac{1}{k!}(\cos \circ \ln)^{(k)}(p)$.

(b) Verwenden Sie die Ihnen bereits bekannten Taylorentwicklungen $j_1(\ln)$ und $j_0(\cos)$ und lösen Sie das Problem mittels Substitution von Potenzreihen.

Lösung:

(a) Berechnen wir die ersten zwei Ableitungen von $\cos\circ\ln$:

$$\begin{aligned}(\cos\circ\ln)'(x) &= -\frac{\sin(\ln(x))}{x},\\ (\cos\circ\ln)''(x) &= -\frac{\frac{\cos(\ln(x))}{x}\cdot x - \sin(\ln(x))\cdot 1}{x^2} = -\frac{\cos(\ln(x))-\sin(\ln(x))}{x^2}.\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich

$$\begin{aligned}a_0 &= (\cos\circ\ln)(1) = \cos(0) = 1,\\ a_1 &= -\frac{\sin(\ln(1))}{1} = -\sin(0) = 0,\\ a_2 &= -\frac{1}{2!}\cdot\frac{\cos(\ln(1))-\sin(\ln(1))}{1^2} = -\frac{1}{2}(\cos(0)-\sin(0)) = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Folglich haben wir:

$$j_1^2(\cos\circ\ln)(x-1) = \sum_{k=0}^{2} a_k(x-1)^k = 1-\frac{1}{2}(x-1)^2,$$

bzw.

$$j_1^2(\cos\circ\ln)(t) = 1-\frac{1}{2}t^2.$$

(b) Vgl. Skript, S. 108:

$$\begin{aligned}\ln(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n \quad \text{für } x\in\,]0,2],\\ \cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \quad \text{für } x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Die Taylorpolynome vom Grad 2 in den entsprechenden Entwicklungspunkten sind also:

$$\begin{aligned}j_1^2(\ln)(x-1) &= (x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2,\\ \text{bzw. } j_1^2(\ln)(t) &= t-\frac{1}{2}t^2,\\ j_0^2(\cos)(x) &= 1-\frac{1}{2}x^2.\end{aligned}$$

(Bzw.: Dies sind bereits Ergebnisse der Gruppenübung.)
Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}j_1^2(\cos\circ\ln)(x-1) &\approx_1^2 \big(j_0^2(\cos)\circ(j_1^2(\ln)-0)\big)(x-1)\\ &= j_0^2(\cos)\Big((x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2-0\Big)\\ &= 1-\frac{1}{2}\Big((x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2\Big)^2 \approx_1^2 1-\frac{1}{2}(x-1)^2,\end{aligned}$$

d. h.,

$$j_0^2(\cos\circ\ln)(x-1) = 1-\frac{1}{2}(x-1)^2.$$

Alternative Rechnung:

$$\begin{aligned} j_1^2(\cos\circ\ln)(t) &\approx_0^2 \big(j_0^2(\cos)\circ(j_1^2(\ln)-0)\big)(t) \\ &= j_0^2(\cos)\big(t-\frac{1}{2}t^2-0\big) \\ &= 1-\frac{1}{2}\big(t-\frac{1}{2}t^2\big)^2 \approx_0^2 1-\frac{1}{2}t^2, \end{aligned}$$

d. h.,

$$j_0^2(\cos\circ\ln)(t) = 1-\frac{1}{2}t^2.$$

Abgabe der Hausübungen: Am Freitag den 26. Juni 2009 vor der Übung.
(Hinweise auf Fehler bei diesen Aufgaben bitte an Michael Klotz, kl...@math...tik.tu-darmstadt.de)