Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
René Hartmann
Michael Klotz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009 17.4.2009

Mathematik II für ET, WI(ET), SpoInf, iSt, BEd.ET, CE

1. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1) Rektifizierbarkeit & Bogenlänge

a) Bestimmen Sie die Bogenlänge der beiden Wege

(i) $\vec{f} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\vec{f}(t) = (r\cos t, r\sin t, ct)$, wobei $r, c > 0$.

(ii) $\vec{g} : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, $\vec{g}(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$.

Skizzieren Sie $\vec{f}$ für die Parameter $r = 1, c = 1/(2\pi)$.

b) Sei $a < b \in \mathbb{R}$ und $\vec{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz-stetige Funktion mit Lipschitz Konstante c:

$$\|\vec{f}(x) - \vec{f}(y)\| \le c|x - y|.$$

Beweisen Sie:

i) $\vec{f}$ ist rektifizierbar.

ii) Es gilt $L(\vec{f}) \le c(b - a)$.

Lösung:

a) Mit dem Theorem aus dem Skript ist

(i) $\frac{\partial \vec{f}}{\partial t} = (-r\sin t, r\cos t, c)$ and $\|\frac{\partial \vec{f}}{\partial t}\|^2 = r^2 + c^2$. Daher

$$L(\vec{f}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + c^2}\mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{r^2 + c^2}.$$

(ii) $\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} = (\sinh t, \cosh t, 1)$ and $\|\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}\| = \sinh^2 t + \cosh^2 t + 1 = 2\cosh^2 t$. Deshalb

$$L(\vec{g}) = \int_0^1 \sqrt{2}\cosh t\mathrm{d}t = \sqrt{2}\sinh 1.$$

b) Sei $F = \{x_0, \dots, x_n\}$ eine endliche Teilmenge von $[a, b]$, welche $\{a, b\}$ enthält. Dann gilt

$$L(\vec{f})_F = \sum_{k=1}^{n} \|\vec{f}(x_k) - \vec{f}(x_{k-1})\| \le \sum_{k=1}^{n} c\|x_k - x_{k-1}\| = c(b - a)$$

Dies zeigt dass $\vec{f}$ rektifizierbar ist und $L(\vec{f}) \le c(b - a)$. $\square$

(G 2) Wegintegrale

Gegeben seien die Funktionen

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} 6xy - 1 + y^2 \\ 3x^2 + 15y^2 \end{pmatrix}, \quad G(x,y) = \begin{pmatrix} 12y^2 + 6x^2 \\ 24xy + 5y^4 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie das Integral von F entlang zweier verschiedener Wege von $(0,0)$ nach $(1,1)$, die Sie sich frei aussuchen dürfen! Skizzieren Sie kurz Ihre beiden Wege. Hängt das Integral von dem Weg ab?

b) Wie a) nur für die Funktion G anstelle von F. Wie verhält es sich hier mit der Abhängigkeit vom gewählten Weg?

LÖSUNG:

F ist nicht exakt, das Integral somit wegabhängig. G besitzt das Potential $g = 12xy^2 + 2x^3 + y^5$, also für Γ ein beliebiger Weg von $(0,0)$ nach $(1,1)$ folgt $\int_\Gamma G dX = g(1,1) - g(0,0) = 15$.

(G 3) Minitest

Überlege kurz(!), welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch ist. (Der Minitest soll nicht mehr als **5 Minuten** in Anspruch nehmen.)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- ☐ Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^\infty a_k$.
- ☐ Wenn die Reihe $\sum_{k=1}^\infty a_k$ konvergiert, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.
- ☐ Wenn die Reihe $\sum_{k=1}^\infty a_k$ absolut konvergiert, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine positive Nullfolge.

LÖSUNG:

- ☐ Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^\infty a_k$.
- ■ Wenn die Reihe $\sum_{k=1}^\infty a_k$ konvergiert, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.
- ☐ Wenn die Reihe $\sum_{k=1}^\infty a_k$ absolut konvergiert, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine positive Nullfolge.

(G 4) Reihen

Überprüfen Sie anhand geeigneter Kriterien, ob die folgenden Reihen konvergieren bzw. absolut konvergieren. Bestimmen Sie für (i) und (v) den Grenzwert der Reihe.

$$(i) \sum_{k=0}^\infty \tfrac{2+(-3)^k}{4^k} \qquad (ii) \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \cdot \tfrac{n+1}{n}$$

$$(iii) \sum_{n=1}^\infty (\sqrt[n]{n} - 1)^n \qquad (iv) \sum_{n=2}^\infty \left(\tfrac{1}{\sqrt{n}-1} + \tfrac{1}{\sqrt{n}+1}\right)$$

$$(v) \sum_{k=1}^\infty \tfrac{28+(-3)^{k-1}}{4^{k+2}} \qquad (vi) \sum_{n=1}^\infty \tfrac{1}{n\sqrt{n}}.$$

LÖSUNG:

(i) Es gilt

$$\left|\tfrac{2+(-3)^k}{4^k}\right| \le \tfrac{2+3^k}{4^k} \le \tfrac{2\cdot 3^k}{4^k} = 2 \cdot \left(\tfrac{3}{4}\right)^k.$$

Die Reihe $2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)$ ist eine geometrische Reihe und konvergiert demzufolge. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+(-3)^k}{4^k}$ absolut. Der Genzwert der Reihe lautet

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2+(-3)^k}{4^k} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{4^k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^k}{4^k} \qquad \text{(Auseinanderziehen der Summe wg. Konv. mgl.!)}\\ &= 2\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^k = 2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} + \frac{1}{1+\frac{3}{4}}\\ &= \frac{68}{21}.\end{aligned}$$

(ii) Diese Reihe ist nicht konvergent, denn für $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n}$ gilt NICHT $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, im Gegenteil, die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert selbst nicht.

(iii) Sei $a_n = \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n$, dann

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left|\sqrt[n]{n} - 1\right|.$$

Wegen

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = \exp\left\{\tfrac{1}{n} \cdot \ln n\right\}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \ln n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} = 0$$

(Regel von de l'Hospital) folgt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Es existiert also ein $N \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n > N$ gilt:

$$\left|\sqrt[n]{n} - 1\right| < \tfrac{1}{2}.$$

Dies wiederum bedeutet für alle $n > N$

$$\sqrt[n]{a_n} = \left|\sqrt[n]{n} - 1\right| < \tfrac{1}{2} < 1$$

und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n} - 1)^n$ konvergiert nach dem Wurzelkriterium absolut.

(iv) Sei $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}-1} + \frac{1}{\sqrt{n}+1}$, dann gilt

$$a_n = \frac{2\sqrt{n}}{n-1} = 2\frac{\sqrt{n}}{n-1} > 2\frac{\sqrt{n}}{n} = 2\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{2}{n}.$$

Die Reihe $2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist jedoch divergent (harmonische Reihe) und mit dem Minorantenkriterium folgt auch die Divergenz der Reihe $\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}-1} + \frac{1}{\sqrt{n}+1})$.

(v) Es gilt

$$\left|\frac{28+(-3)^{k-1}}{4^{k+2}}\right| \leq \frac{28+3^{k-1}}{4^{k+2}} \leq \frac{28 \cdot 3^k}{4^k} \cdot \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{7}{12} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k.$$

Die Reihe $\frac{7}{12} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k$ konvergiert (geometrische Reihe) und nach dem Majorantenkriterium konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{28+(-3)^{k-1}}{4^{k+2}}$.

Der Grenzwert der Reihe berechnet sich gemäß

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{28+(-3)^{k-1}}{4^{k+2}} &= \frac{1}{4^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{28+(-3)^{k-1}}{4^{k-1}} \\ &= \frac{1}{64} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{28+(-3)^{k}}{4^{k}} \\ &= \frac{1}{64} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{28}{4^k} + \sum_{k=0}^{\infty} \Big(-\frac{3}{4}\Big)^k \Big) \\ &= \frac{28}{64} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} + \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{1+\frac{3}{4}} = \frac{7}{12} + \frac{1}{112}.\end{aligned}$$

(vi) Man benutzt das Integralkriterium mit $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$, $D(f) = [1, \infty[$. Die Funktion f ist auf ihrem Definitionsbereich stetig, positiv, monoton fallend und es gilt

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \tfrac{1}{x\sqrt{x}} dx = \int_1^{\infty} x^{-\frac{3}{2}} = -2x^{-\frac{1}{2}} \Big|_1^{\infty} = 2.$$

Da das Integral existiert, konvergiert auch die Reihe.

Hausübungen

(H 1) Herzkurve (6 Punkte)

Es sei $r(\varphi) = 2a(1+\cos(\varphi))$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $a > 0$. Der durch

$$\vec{k}(\varphi) = r(\varphi) \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} = a \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) \end{pmatrix} \right]$$

gegebene Weg heisst *Kardioide*. Skizzieren Sie $\vec{k}$ und berechnen Sie seine Länge!

Hinweis: $2\sin(t)\cos(t) = \sin(2t)$, $\cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos(2t)$, $\cos(t) = 1 - 2\sin^2(t/2)$.

LÖSUNG:

Die Kurve trägt ihren Namen, weil sie herzförmig ist. Es gilt

$$\frac{\partial \vec{k}}{\partial \varphi} = 2a \begin{pmatrix} -\sin(2\varphi) - \sin(\varphi) \\ \cos(2\varphi) + \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

also $\| \frac{\partial \vec{k}}{\partial \varphi} \| = 2\sqrt{2}a\sqrt{1+\cos(\varphi)}$. Unter Verwendung des Hinweises berechnet man

$$L = \int_0^{2\pi} \| \frac{\partial \vec{k}}{\partial \varphi} \| \, d\varphi = \int_0^{2\pi} 4a |\cos(t/2)| \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} 4a \cos(t/2) \, dt = 16a.$$

(H 2) Wegintegral (6 Punkte)

Es sei $\vec{w}_1$ der durch $\vec{w}_{1,1} : (0,t), t \in [0,1]$ und $\vec{w}_{1,2} : (t-1, 2-t), t \in [1,2]$ zusammengesetzte Weg. Ferner sei $\vec{w}_2$ der Weg von $(0,0)$ nach $(1,0)$, der sich aus dem durch (t^2, t) mit $t \in [0,1]$ parametrisierten Weg $\vec{w}_{2,1}$ und dem Geradenstück $\vec{w}_{2,2}$ von $(1,1)$ nach $(1,0)$ ergibt. Berechnen Sie die Wegintegrale

$$\int_{\vec{w}_j} F \cdot d\vec{x}, \quad j \in \{1, 2\},$$

für das Vektorfeld

$$F(x,y) = (2xy - x^2, \, x + y^2).$$

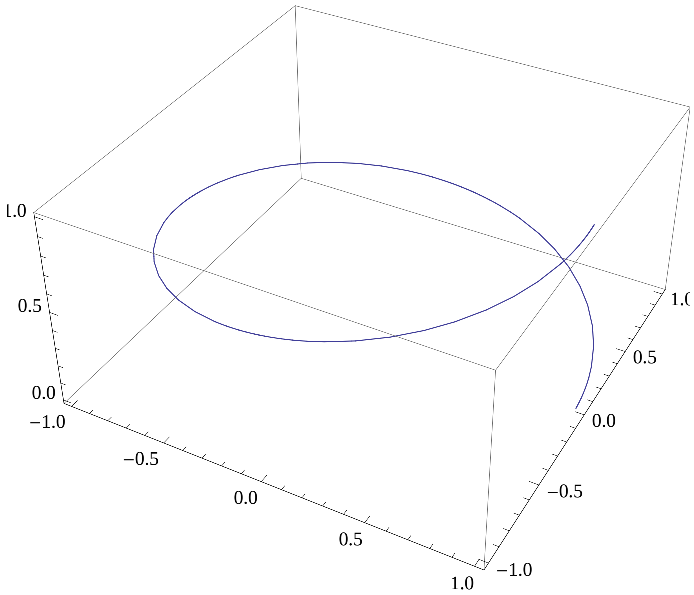

Abbildung 1: Die Funktion $\vec{f}$ mit Parametern $r = 1, c = 1/(2\pi)$.

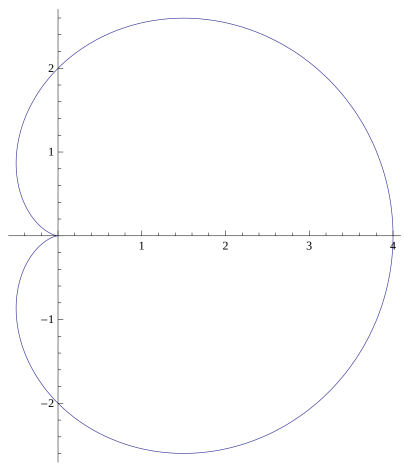

Abbildung 2: Die Kardioide $\vec{k}$ zu $a = 1$.

LÖSUNG:

Weg $\vec{w}_1$: mit $X_1(t) = (0,t), t \in [0,1]$ und $X_2(t) = (t-1, 2-t), t \in [1,2]$ ist

$$\begin{aligned}
\int_{\vec{w}_1} F \cdot dX &= \int_{\vec{w}_{1,1}} F \cdot dX + \int_{\vec{w}_{1,2}} F \cdot dX \\
&= \int_0^1 (0,t^2) \cdot (0,1) dt + \int_1^2 (2(t-1)(2-t) - (t-1)^2, t-1+(2-t)^2) \cdot (1,-1) dt \\
&= \ldots = -1/2.
\end{aligned}$$

Weg $\vec{w}_2$: mit $X_1(t) = (t^2,\, t),\, t \in [0,1],\;\; X_2(t) = (1, 1-t),\, t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
\int_{\vec{w}_2} F \cdot\, dX &= \int_{\vec{w}_{2,1}} F\, dX_1 + \int_{\vec{w}_{2,2}} F\, dX_2 \\
&= \int_0^1 (2t^3 - t^4, 2t^2) \cdot (2t, 1)\, dt + \int_0^1 (2(1-t) - 1,\, 1 + (1-t)^2)) \cdot (0,-1)\, dt \\
&= \int_0^1 4t^4 - 2t^5 + 2t^2 - 1 - (1-t)^2\, dt \\
&= \int_0^1 -2t^5 + 4t^4 + t^2 + 2t - 2\, dt \\
&= [-(1/3)t^6 + (4/5)t^5 + (1/3)t^3 + t^2 - 2t]_{t=0}^1 \\
&= -(1/3) + (4/5) + (1/3) + 1 - 2 = -1/5.
\end{aligned}$$

(H 3) Absolut konvergent, konvergent, divergent (5 Punkte)

Entscheide, ob die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, konvergent oder divergent ist für

$$(a)\ a_k = (-1)^k, \quad (b)\ a_k = (-1)^k\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}\right), \quad (c)\ a_k = \frac{(-17)^k}{k!}.$$

LÖSUNG:

(a) Diese Reihe konvergiert nicht. Die notwendige Voraussetzung, daß $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, ist nicht erfüllt.

(b) Diese Reihe konvergiert nach dem Kriterium von Leibniz. Nach dem Minorantenkriterium konvergiert sie nicht absolut. Denn $\sum \frac{1}{k}$ divergiert und es gilt $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} = |a_k|$.

(c) Wir benutzen das Quotientenkriterium.

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{17^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{17^n}{n!}} = \frac{17}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Somit konvergiert die Reihe absolut.

(H 4) Majoranten und Minoranten (4 Punkte)

Finden Sie für die folgenden Reihen eine Majorante bzw. eine Minorante, von der bekannt ist, daß sie konvergiert bzw. divergiert.

$$1.\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k + \sqrt{k}}{k^3 + 2k^2 + 5k - 1}, \qquad 2.\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + \sqrt{k}}{k^3 + 2k^2 + 5k - 1}.$$

LÖSUNG:

1. Es gilt

$$\frac{k+\sqrt{k}}{k^3+\underbrace{2k^2+5k-1}_{\geq 0}} \quad \leq \quad \frac{k+k}{k^3} = \frac{2}{k^2}.$$

   Somit ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{k^2}$ eine Majorante.

2. Es gilt

$$\frac{k^2+\sqrt{k}}{k^3+2k^2+5k-1} \quad \geq \quad \frac{k^2}{k^3+2k^3+5k^3} = \frac{1}{8k}.$$

   Somit ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{k}$ eine Minorante.