Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
Dipl.-Math. Tobias Hansel
Dipl.-Math. Rene Hartmann
Dipl.-Math. Michael Klotz

Technische Universität Darmstadt

SS 2009
12.06.2009

9. Übungsblatt zur „Mathematik II für ET, WI(ET), SpoInf, IkT, IST, CE, Mechatronik“

Gruppenübung

Aufgabe G30 (Konvergenz von Funktionenfolgen und -reihen)

Sei (f_n) eine Funktionenfolge von reellen Funktionen $f_n\colon \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ und sei f eine weitere reelle Funktion auf D. Kreuzen Sie alle allgemeingültigen Aussagen an.

- ☐ Wenn (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert, dann konvergiert (f_n) punktweise gegen f.
- ☐ Wenn (f_n) punktweise gegen f konvergiert, dann konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f.
- ☐ Wenn (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert, dann ist $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_\infty = 0$.
- ☐ Wenn $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_\infty = 0$ gilt, dann konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f.
- ☐ Wenn die Zahlenreihe $\sum_{n=1}^\infty ||f_n||_\infty$ konvergiert, dann kovergiert die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^\infty f_n$ punktweise.
- ☐ Wenn die Zahlenreihe $\sum_{n=1}^\infty ||f_n||_\infty$ konvergiert, dann kovergiert die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^\infty f_n$ gleichmäßig.
- ☐ Wenn die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^\infty f_n$ punktweise konvergiert, dann konvergiert die Zahlenreihe $\sum_{n=1}^\infty ||f_n||_\infty$.
- ☐ Wenn die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^\infty f_n$ gleichmäßig konvergiert, dann konvergiert die Zahlenreihe $\sum_{n=1}^\infty ||f_n||_\infty$.

Fourierreihen: Für eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Periode $T > 0$ lautet die zugehörige Fourierreihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(\frac{2\pi}{T}nx) + b_n \sin(\frac{2\pi}{T}nx))$$

mit den Koeffizienten

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(\frac{2\pi}{T}nx)\,dx,\ n \in \mathbb{N}_0,$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(\frac{2\pi}{T}nx)\,dx,\ n \in \mathbb{N}.$$

Falls die Funktion gerade ist, d. h. $f(x) = f(-x)$ für $x \in \mathbb{R}$, dann ist

$$a_n = 2 \cdot \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos(\frac{2\pi}{T} nx)\, dx$$

und $b_n = 0$. Falls die Funktion ungerade ist, d. h. $f(x) = -f(-x)$ für $x \in \mathbb{R}$, dann ist

$$b_n = 2 \cdot \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin(\frac{2\pi}{T} nx)\, dx$$

und $a_n = 0$.

Ist die Funktion f stückweise stetig differenzierbar, so konvergiert die Fourierreihe für jedes x. An allen Stetigkeitsstellen x von f stimmt der Grenzwert mit $f(x)$ überein. An allen Sprungstellen x konvergiert die Reihe gegen $\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}$.

Aufgabe G31 (Fourierreihen)

(a) Bestimmen Sie die Fourierreihen der 2π-periodischen Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |\sin x|$$

und

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \pi - e^2 \frac{\cos(3x)}{2}.$$

Konvergieren die Fourierreihen? Stimmen sie mit der jeweiligen Funktion überein?

(b) Sei $a \in \mathbb{R}$ und gelte $0 < a < 1$. Bezeichne f_a die 1-periodische Funktion, für die gilt

$$f_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \le x \le a \\ 0 & \text{falls } a < x < 1 \end{cases}$$

Skizzieren Sie die Funktion f_a für $a = 0.25$ auf dem Intervall $[-1, 2]$. Bestimmen Sie dann die Fourierreihe von f_a (für allgemeines a). Konvergiert die Reihe? Bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzfunktion und überprüfen Sie, ob diese mit f_a übereinstimmt.

Tipp: Es gilt

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)).$$

Aufgabe G32 (Quotienten von Potenzreihen)

Entwickeln Sie die Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x) := \frac{x}{x^4+1}$$

in eine Potenzreihe mit dem Entwicklungspunkt 0 und bestimmen Sie deren Konvergenzradius.

Tipp: Fassen Sie x und x^4+1 als Potenzreihen auf und benutzen Sie Satz 25.17 über den Quotienten von Potenzreihen.

Hausübung

Aufgabe H28 (Fourierreihen) (2+6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Fourierreihe der 2π-periodischen Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin(x)\cos(x).$$

Stimmen Fourierreihe und Funktion überein?

(b) Wir betrachten die 4-periodische Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = x \sin(\frac{2\pi}{4}x) \quad \text{falls } -2 \leq x < 2.$$

Bestimmen Sie ihre Fourriereihe. Konvergiert die Reihe? Bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Grenzfunktion. (Beachten Sie auch den Tipp aus der Gruppenübung.)
Warnung: Beachten Sie, dass die angegebene Formel nur auf dem Intervall [-2,2[gültig ist. Die periodische Fortsetzung lässt sich nicht direkt durch diese Formel beschreiben. Tipp: Wenn Sie darüber nachdenken, ob die Funktion vielleicht zufällig gerade oder ungerade ist, können Sie geschickter vorgehen.

Aufgabe H29 (Potenzreihen und Differentiation) (1+2+2 Punkte)

Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

mit $a_0 = 2009$ und $a_n = \frac{1}{n}$ für alle $n > 0$.

(a) Ermitteln Sie den Konvergenzradius ρ.

(b) Sei $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für $x \in]-\rho, \rho[$. Bestimmen Sie jeweils eine Potenzreihe für die Ableitungen f' und f''. Was wissen Sie über den Konvergenzradius der abgeleiteten Potenzreihen?

(c) Bestimmen Sie eine explizite Funktionsvorschrift für die Ableitungsfunktion f' (d.h., bestimmen Sie die Summe der Reihe). Bestimmen Sie mit ihrer Hilfe dann auch die Summen der Reihen von f und f''.

Aufgabe H30 (Potenzreihen und Integration) (3 Punkte)

Nehmen Sie an, dass es eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (mit $a_0 = 1$ und) mit positiven Konvergenzradius ρ gibt, für die die entsprechende Funktion $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $x \in]-\rho, \rho[$ die Eigenschaft

$$\int_0^x f(t)\,dt = f(x) - a_0 \quad \text{für alle } x \in]-\rho, \rho[$$

hat. Bestimmen Sie die Koeffizienten der Potenzreihe, indem Sie diese gliedweise integrieren und einen Koeffizientenvergleich durchführen. Was ist das für eine Reihe und warum ist dieses Ergebnis nicht verwunderlich?

Abgabe der Hausübungen: Am Freitag den 19. Juni 2009 vor der Übung.
(Korrekturen zu diesem Übungsblatt bitte an Michael Klotz, kl...@math...tik.tu-darmstadt.de)