Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
Tobias Hansel
René Hartmann
Michael Klotz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 09 5.6.2009

Mathematik II für ET, WI(ET), SpoInf, IST, BEd.ET, CE

8. Übung

Gruppenübungen

(G 26) (Punkweise und gleichmäßige Konvergenz)

Untersuche die folgenden Funktionenfolgen bzw. -reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

(a) $f_n = \sqrt[n]{n^2x^3}, \quad x \in [0,5]$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3+x^3}, \quad x \in [0,1]$; (c) $g_n = \sin\frac{x}{n}, \quad x \in \mathbb{R}$.

(G 27) (Potenzreihen)

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der nachfolgenden Potenzreihen:

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^7x^n}{2n!}, \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n} \qquad \text{und} \qquad \text{(iii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4nx)^n}{2n^3}.$$

Wie sieht bei der zweiten Reihe das Konvergenzverhalten auf dem Rand des Konvergenzintervalls aus? Geben Sie alle $x \in \mathbb{R}$ an, für die die Potenzreihen konvergieren.

(G 28) (Funktionenfolgen und Integration)

Sei

$$f_n : (0,1) \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} n & x < \frac{1}{n} \\ 0 & x \geq \frac{1}{n} \end{cases}.$$

(a) Gegen welche Funktion konvergiert die Funktionenfolge f_n punktweise?

(b) Konvergiert die Funktionenfolge f_n gleichmäßig?

(c) Berechnen Sie

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$$

und vergleichen Sie die Werte. Geben Sie auch eine Begründung an.

(d) Sei $a \in (0,1)$. Berechnen Sie

$$\int_a^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \int_a^1 f_n(x)dx$$

und vergleichen Sie die Werte. Geben Sie auch eine Begründung an.

(G 29) (Funktionenfolgen und Differentation)

Sei

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^n}{n}.$$

1. Gegen welche Funktion konvergiert die Funktionenfolge f_n punktweise?
2. Konvergiert die Funktionenfolge f_n gleichmäßig?
3. Berechnen Sie

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} f_n'$$

und vergleichen Sie die Ergebnisse. An welchen Stellen treten Unterschiede auf und wie sind diese zu erklären?

Hausübungen

(H 25) (Funktionalmatrix; 2+2+2 Punkte)

Gegeben sind zwei Vektorfelder

$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ F(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ und $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ G(x,y) = (g_1(x,y), g_2(x,y))$,

wobei $f_1(x,y) = x^2$, $f_2(x,y) = \exp(y)$, $g_1(x,y) = x\cos(y)$, $g_2(x,y) = \cos(x)$. Außerdem sei H: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gleich $F \circ G$, d.h. $H(x,y) = F(G(x,y))$.

(a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung von f_1, f_2, g_1 und g_2.

(b) Setzen Sie aus den partiellen Ableitungen aus (a) die Funktionalmatrizen $J_F(x,y)$ und $J_G(x,y)$ zusammen.

(c) Stellen Sie $J_F(g_1(x,y), g_2(x,y))$ auf, und bestimmen Sie die Funktionalmatrix von $J_H(x,y)$ mit Hilfe der Kettenregel. Geben Sie $J_H(\pi/2, \pi)$ an.

(H 26) (Reihen; 3+3 Punkte)

(a) Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n 2^n \cdot (x-2)^n \ .$$

(i) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe.

(ii) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Potenzreihe konvergiert.

(b) Zeigen Sie, daß die folgende Funktionenreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} [x^n(1-x)] \quad , \ x \in \mathbb{R},$$

auf dem Intervall $[0,1]$ punktweise, aber nicht gleichmäßig konvergiert.

(H 27) (Konvergenz von Funktionenfolgen; 1+3+3 Punkte)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $f_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch $f_n(x) = \min\left\{n, \frac{1}{x}\right\}$ gegeben.

(a) Skizzieren Sie f_1, f_2 und f_3.

(b) Gegen welche Grenzfunktion konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise auf dem Intervall $(0,\infty)$? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

(c) Zeigen Sie, daß die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $(0,\infty)$ nicht gleichmäßig konvergiert. Geben Sie Intervalle $I \subset (0,\infty)$ an, auf denen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent ist.