Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
Tobias Hansel
René Hartmann
Michael Klotz

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 09 29.5.2009

Mathematik II für ET, WI(ET), SpoInf, IST, BEd.ET, CE

7. Übung

Gruppenübungen

(G 22) (Basiswechsel)

Gegeben sei ein 2-dimensionaler reeller Vektorraum mit einer orthonormal Basis α. Bezüglich dieser Basis α ist eine Basis $\beta : \vec{b}_1, \vec{b}_2$ durch $\vec{b}_1^\alpha = (1,0)^\mathrm{T}$ und $\vec{b}_2^\alpha = (1,1)^\mathrm{T}$ gegeben.

(a) Zeichnen Sie die Vektoren $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ in ein Koordinatensystem bezüglich der Basis α ein. Zeichnen Sie in dieses Koordinatensystem auch den Vektor $\vec{x}$ ein, der bezüglich der Basis β durch $\vec{x}^\beta = (2,3)^\mathrm{T}$ gegeben ist.

(b) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix ${}^\alpha T_\beta$, die Koordinaten bezüglich der Basis β in Koordinaten bezüglich der Basis α umrechnet. Was steht in ihren Spalten? Verwenden Sie ${}^\alpha T_\beta$, um $\vec{x}^\alpha$ zu bestimmen. Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit der Zeichnung aus (a).

(c) Bestimmen Sie nun die Transformationsmatrix ${}^\beta T_\alpha$, die Koordinaten bezüglich der Basis α in Koordinaten bezüglich der Basis β umrechnet. Überlegen Sie sich dazu, was der Zusammenhang zwischen ${}^\alpha T_\beta$ und ${}^\beta T_\alpha$ ist.

(d) Nun sei eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch die Darstellungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis α gegeben. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix B von φ bezüglich β. Begründen Sie ihre Rechnung.

(G 23) (Transformation von Integralen I)

Durch die Menge $K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq \frac{1}{2}\right\}$ wird eine Kugelkappe der Einheitskugel beschrieben. Veranschaulichen Sie diese Menge mit Hilfe einer Skizze und bestimmen Sie das Volumen von K. Verwenden Sie dazu eine geeignete Substitution (σ, τ) (schreiben Sie diese explizit hin!). Geben Sie außerdem eine Menge B an, so dass $\sigma(B) = K$ gilt.

(G 24) (Transformation von Integralen II)

Sei $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\}$ und beschreibe

$$f : K \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto \frac{1}{1 + x^2 + y^2 + z^2}$$

die Ladungsdichte im Körper K. Berechnen Sie die Gesamtladung von K, indem Sie eine geeignete Substitution verwenden.

(G 25) (Transformation von Integralen III)

Berechnen Sie unter Verwendung einer geeigneten Substitution das Integral

$$\int_G (x^2 + y^2) \mathrm{d}(x, y),$$

mit dem Integrationsbereich $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \sqrt{x - x^2}, 0 \leq x \leq 1\}$. Machen Sie sich zunächst eine Skizze von G.

Hinweis: Verwenden Sie $\cos^4(\varphi) = \frac{1}{8}(\cos 4\varphi + 4\cos 2\varphi + 3)$.

Hausübungen

(H 22) (Transformation von Integralen; 4+4 Punkte)

Berechnen Sie jeweils unter Verwendung einer geeigneten Substitution die folgenden Integrale und machen Sie jeweils eine Skizze des Integrationsbereiches.

(a)
$$\int_G (x^2 + y^2) \mathrm{d}(x, y)$$
mit Integrationsbereich $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; |x| \geq 1 \text{ oder } |y| \geq 1, \; x^2 + y^2 \leq 2\}$.

(b)
$$\int_Z \frac{z}{1 + x^2 + y^2} \mathrm{d}(x, y, z)$$
mit Integrationsbereich $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 \leq 1, \; 0 \leq z \leq 1\}$.

(H 23) (Volumen eines Kugelschalensektors; 5+4 Punkte)

(a) Gegeben sei der Kreisringsektor

$$K = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \; z \geq 0, \; 9 \leq x^2 + z^2 \leq 81\}.$$

Machen Sie eine Skizze von K und geben Sie eine Menge B an, so dass $\sigma(B) = K$ gilt, wobei

$$\sigma : [0, \infty[\times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \sigma(r, \vartheta) = (r\cos\vartheta, r\sin\vartheta).$$

die Polarkoordinaten beschreibt. Berechnen Sie den Flächeninhalt von K sowie den Schwerpunkt (x_s, z_s) der Fläche K. Geben Sie den Schwerpunkt außerdem in Polarkoordinaten (r_k, ϑ_k) an. Liegt (x_s, z_s) in K?

(b) Berechnen Sie das Volumen des Kugelschalensektors

$$D = \{(r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta) : 3 \leq r \leq 9, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

Verwenden Sie dabei die Resultate aus Teil (a).

(H 24) (Determinante; 2 Punkte)

Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

indem Sie nach einer geeigneten Spalte oder Zeile entwickeln.