6. Übung Mathematik II für ET, 22.5.2009

(G17) Ebenen im Raum. Bestimmen Sie die affine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ so, dass $\{A, B, C\} \subseteq \{(x, y, z) \mid z = f(x, y)\}$ für $A = (-1, 2, 2), B = (-2, 0, -2), C = (3, 2, 0)$.

(G18) Matrizenkalkül. Gegeben seien die Matrizen A, B, C. Welche dieser Matrizen kann man miteinander multiplizieren? Berechnen Sie $A(BC)$ und $(AB)C$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(G 19) Koordinatentransformation für Vektoren. Bezüglich einer Basis $\alpha : \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ des Raumes sei die Basis $\beta : \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ gegeben durch

$$\vec{b}_1^\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2^\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_3^\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix ${}^\alpha T_\beta$ mit $\vec{x}^\alpha = {}^\alpha T_\beta \vec{x}^\beta$. Was steht in ihren Spalten?

b) Stellen Sie die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ mit $\vec{v}_1^\beta = (1, 0, 0)^t, \vec{v}_2^\beta = (2, 1, 2)^t$ bezüglich α dar, das heißt bestimmen Sie $\vec{v}_1^\alpha, \vec{v}_2^\alpha$.

(G20=H19) Spiegelung in der Ebene. (4 Punkte) In der Ebene seien ein Ursprung O und eine Orthonormalbasis α gegeben. Die Gerade g gehe durch O und habe den Richtungsvektor $\vec{v}$ mit Koordinaten $\vec{v}^\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{3}, -1)^t$. Bestimmen Sie die Matrix A der Spiegelung σ (aufgefasst als lineare Abbildung) an g bezüglich der Basis α. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

1. Machen Sie eine Skizze
2. Ermitteln Sie zunächst eine Orthonormalbasis $\beta : \vec{b}_1, \vec{b}_2$, bezüglich derer Sie die Matrix B von σ sofort angeben können
3. Geben Sie die Transformationsmatrizen ${}^\alpha T_\beta$ und ${}^\beta T_\alpha$ an.
4. Wie kann man A ein geeignetes Produkt der Matrizen aus 2 und 3 schreiben? Warum? Berechnen Sie A und überprüfen Sie Ihr Ergebnis anhand der Skizze
5. $\sigma(\vec{x})$ kann man mittels Vektorrechnung direkt ausdrücken. Wie? Wie kommt man dann auf A? Vergleichen Sie die Ergebnisse.

(G21) Determinante und Stufenform.

a) Beweisen Sie mittels der Regeln (D1-4) aus Kap.8 und Scherungsinvarianz

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}.$$

b) Sei α eine Orthonormalbasis des Raumes. Bestimmen Sie $\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ für die Vektoren mit Koordinaten $\vec{a}_1^\alpha = (1, 1, 1)^t$, $\vec{a}_2^\alpha = (-1, 0, 1)^t$, $\vec{a}_3^\alpha = (-1, 1, 1)^t$ unter Verwendung von a)

H (18) Determinante, Bild & Kern (3 Punkte). Sie haben eine lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ vorliegen, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 18 & 27 & 27 \\ 15 & 25 & 24 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine Basis von Bild ϕ und von Kern ϕ. Welche Beziehung gilt zwischen den Dimensionen der beiden? Welcher Zusammenhang besteht zu linearen Gleichungssystemen?

b) Bestimmen Sie $\det(A)$

(H 20) Transformation der Beschreibung linearer Abbildungen (2+2 Punkte). Die Basen α und β des Raumes seien wie in **G19** gegeben.

a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen ${}^{\beta}T_{\alpha}$ und ${}^{\alpha}T_{\beta}$? Berechnen Sie über diesen ${}^{\beta}T_{\alpha}$.

b) Die lineare Abbildung ϕ des Raumes in sich sei bezüglich α durch folgende Matrix gegeben

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Matrix B von ϕ bezüglich der Basis β. Begründen Sie Ihre Vorgehensweise. Welche Rolle spielt hier ${}^{\alpha}T_{\beta}\vec{x}^{\beta}$?

(H 21) Orthogonalisierung (1+1+1+1 Punkte). Im Raum seien Usprung O und Orthonormalbasis α gegeben. Die Vektoren $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_2$ haben die Koordinaten

$$\vec{u}_1^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2^{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{u}_3^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Welche der Vektoren $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ und $\vec{u}_3$ sind zueinander orthogonal? Bestimmen Sie die Längen!

b) Bestimmen Sie den Fußpunkt des Lotes von $\vec{u}_3 + O$ auf die Ebene durch O mit Richtungsvektoren $\vec{u}_1, \vec{u}_2$

c) Geben Sie eine Orthonormalbasis $\beta : \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ des Raumes so an, dass $\mathsf{Spann}\{\vec{v}_i\} = \mathsf{Spann}\{\vec{u}_i\}$ für $i = 1, 2$.

d) Geben Sie die Transformationsmatrizen ${}^{\alpha}T_{\beta}$ und ${}^{\beta}T_{\alpha}$ an. Bestimmen Sie $\vec{u}_3^{\beta}$.

(H22) Fubini & Normalbereiche im Dreidimensionalen (5 Punkte). Bestimme das Volumen, welches innerhalb des Zylinders $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4\}$, über der Ebene $z = 0$ und unterhalb des durch die Gleichung $(x + 2)^2 + y^2 = 4z$ gegebenen Paraboloids liegt. Sie haben **freie Wahl** zwischen den zwei Möglichkeiten: a) Verwenden Sie kartesische Koordinaten und Normalbereiche beim Integrieren. b) Verwenden Sie Zylinderkoordinaten.