Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
René Hartmann
Michael Klotz
Tobias Hansel

Mathematik II für ET, WI(ET), SpoInf, iSt, BEd.ET, CE

5. Übung

Gruppenübungen

(G 13) Maßtheorie am Dreieck

Sie haben das durch die Eckpunkte $(0,0),(2,0),(2,1)$ gegebene Dreieck ◢ vorliegen. Entwerfen Sie eine Zerlegung Z_n von ◢ aus Rechtecken, deren Weite für $n \to \infty$ verschwindet (Nachweis!). Benutzen Sie anschließend Z_n, um den Flächeninhalt des Dreiecks zu bestimmen! *Hinweis:* Es gilt $\sum_{k=1}^n k = n(n+1)/2$.

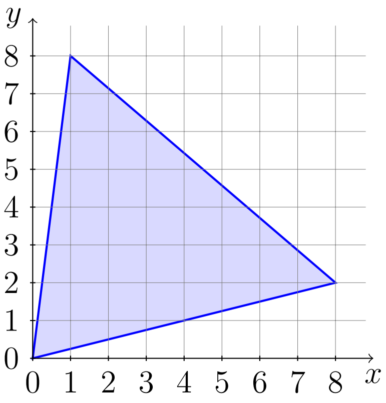
(G 14) Integration auf dem Einheitskreis

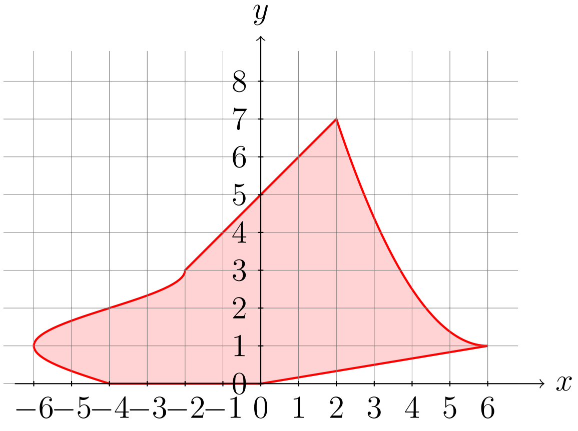
Sie möchten das Integral der Funktion $f(x,y) = x^2+y^2$ über dem Einheitskreis $\bigcirc := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ bestimmen.

a) Geben Sie eine Zerlegung Z_n des Einheitskreises an, welche aus n^2 zueinander ähnlichen Kreisringstücken besteht. Dabei sollen jeweils der Radius $r \in [0,1]$ und die Winkel in immer kleiner werdende Stücke unterteilt sein. Verdeutlichen Sie sich Ihre Konstruktion anhand einer Skizze.

b) Bestimmen Sie mit Schulwissen oder Formelsammlung den Flächeninhalt der Kreisringstücke aus Z_n, sowie passende Stufenfunktionen $\underline{f}_n, \overline{f}^n$.

c) Bestimmen Sie $\int_{\bigcirc} f(x,y)d(x,y)$ mithilfe Ihrer Zerlegung. *Hinweis:* Es gilt $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ und $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$. *Tip:* Sie benötigen nur den führenden Koeffizienten, den von n^3.





Links: Das Dreieck ▷ aus **G15**. *Rechts:* Die Menge ⏶ aus **H16**.

(G 15) Normalbereiche

Gegeben seien das in der Abbildung gezeigte Dreieck $\triangleright$ als Integrationsgebiet, sowie der Integrand $f(x,y) = x - y, (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Bestimmen Sie eine Zerlegung von $\triangleright$ in Normalbereiche.

b) Ermitteln Sie mithilfe dieser Normalbereiche das Integral $\int_{\triangleright} f(x,y)d(x,y)$.

(G 16) Matrizen als lineare Abbildungen, Teil 1

Sei

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x,y,z)^T \mapsto (9z - x, 2y + 3x, x + y + z)^T$$

und

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x,y,z)^T \mapsto (3z - 2y - x, 5y)^T.$$

Schreiben Sie f, g und $g \circ f$ in Matrizenform, z.B. bei der ersten Funktion $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ mit geeigneter Matrix A.

Hausübungen

(H 14) Archimedes und die Fläche unter der Parabel (4 Punkte)

Bestimmen Sie wie Archimedes die Fläche unter dem Parabelbogen $y = x^2, x \in [0,1]$ durch Ausschöpfen mit Hilfe einer passenden Zerlegung. Die Formeln aus **G14** können möglicherweise nützlich sein.

(H 15) Geschnittener Zylinder (2+3+0 Punkte)

Sie haben die Ebene $E : z = x + y$ und den Zylinder $Z := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 \leq 1, z \in [0,1]\}$ vorliegen.

a) Bestimmen Sie $\int_{\bigcirc} x + y d(x,y)$, wobei $\bigcirc$ wie in **G14** der Einheitskreis ist.

b) Bestimmen Sie das Volumen desjenigen Zylinderteils, der auf der gleichen Seite der Ebene wie $(1,0,0)$ liegt, mithilfe Ihrer Zerlegung aus **G14**.

c) Freiwillige Zusatzaufgabe (ohne Punkte). Sie haben eine stetige Funktion $h(x) : [0,1] \to (0,\infty)$ gegeben. Bestimmen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn $y = h(x)$ um die x-Achse rotiert wird.

(H 16) Normalbereiche, Teil 2 (2+3 Punkte)

Gegeben seien das in der Abbildung gezeigte $\triangle$ als Integrationsgebiet, sowie der Integrand $f(x,y) = x - y, (x,y) \in \mathbb{R}^2$ aus Aufgabe **G15**.

a) Bestimmen Sie eine Zerlegung von $\triangle$ in Normalbereiche. *Hinweis:* Die beiden nichtlinearen Randkurven von $\triangle$ erfüllen $-x = 4 + 2\sin(\frac{\pi}{2}y)$ bzw. $y = 1 + \frac{3}{8}(x-6)^2$.

b) Ermitteln Sie mit diesen Normalbereichen das Integral $\int_{\triangle} f d(x,y)$. *Hinweis:* $\int \sin^2(t)dt = \frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin(2t)$.

(H 17) Matrizen als lineare Abbildungen, Teil 2 (4 Punkte)

Wir betrachten die linearen Abbildungen $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$\Phi(x_1, x_2) = (x_2, x_1, 3x_1 - x_2)^T, \qquad \Psi(y_1, y_2, y_3) = y_2 + y_3 - y_1.$$

Bestimmen Sie die zu Φ, Ψ und $\Psi \circ \Phi$ gehörigen Matrizen und schreiben Sie die Abbildungen in Matrizenform $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.