Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
Tobias Hansel
René Hartmann
Michael Klotz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 09 8.5.2009

Mathematik II für ET, WI(ET), SpoInf, IST, BEd.ET, CE

4. Übung

Gruppenübungen

(G 9) (Potential)

Gegeben sei das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (x, y)$.

(a) Besitzt F ein Potential? Wenn ja, geben Sie alle Stammfunktionen (Potentiale) an.

(b) Berechnen Sie das Wegintegral $\int_X F \cdot \mathrm{d}X$, wobei X ein Weg mit Anfangspunkt $(-1, 2)$ und Endpunkt $(2, 3)$ ist.

(c) Sei X ein Weg, dessen Kurve ein Dreieck mit Eckpunkten $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$ darstellt. Zeigen Sie, dass $\int\limits_X F \cdot \mathrm{d}X = 0$ gilt.

(G 10) (Stufenfunktionen / Integral)

Wir betrachten die Funktion $f : I = [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$.

(a) Geben Sie für $n \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung Z_n von I in n^2 Teilintervalle an.

(b) Geben Sie zur Zerlegung Z_n zwei Stufenfunktionen $\underline{f}_n$, $\overline{f}_n$ mit $\underline{f}_n \leq f \leq \overline{f}_n$ an.

(c) Benutzen Sie die Stufenfunktionen aus (b) um zu zeigen, dass f auf I Riemann-integrierbar ist.

(G 11) (Satz von Fubini)

(a) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ das Quadrat mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ und $(1, 1)$. Begründen Sie, warum die Funktion $f\colon A \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := x^2 + y^3 + 2xy^2$$

Riemann-integrierbar ist, und berechnen Sie dann das Integral $\int_A f(x, y)\ d(x, y)$.

(b) Wir betrachten den Quader $Q := A \times [0, 5] \subseteq \mathbb{R}^3$ und die Funktion $g\colon Q \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x, y, z) := (x^2 + y^3 + 2xy^2)z.$$

Begründen Sie, warum die Funktion g Riemann-integrierbar ist, und berechnen Sie dann das Integral $\int_Q g(x, y, z)\, d(x, y, z)$.

(G 12) (Jordan-Messbarkeit)

Kreuzen Sie alle wahren bzw. allgemeingültigen Aussagen an.

- ☐ Das Intervall $[1,2] \times [3,4] \times [0,5] \subseteq \mathbb{R}^3$ ist Jordan-messbar und hat Jordan-Inhalt 5.
- ☐ Das Intervall $(1,2) \times [3,4) \times [0,5] \subseteq \mathbb{R}^3$ ist Jordan-messbar und hat Jordan-Inhalt 5.
- ☐ Eine Menge im $\mathbb{R}^n$, die aus einem einzigen Punkt besteht, ist Jordan-messbar und hat den Inhalt 0, d.h., sie ist eine (Jordansche) Nullmenge.
- ☐ Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, so sind auch $A \cup B$, $A \cap B$ und $A \backslash B$ Jordan-messbar.
- ☐ Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, so ist auch $A \cup B$ Jordan-messbar und hat Inhalt $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Hausübungen

(H 11) (Parameterabhängige Integrale; 2+2+2 Punkte)

Im Folgenden sind die Funktionen $g_j : [1,2] \to \mathbb{R}$ (j=1,2,3) gegeben. Untersuchen Sie, ob die Funktionen g_j differenzierbar sind und bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Ableitungen, ohne das jeweilige Integral auszurechnen.

$$g_1(y) = \int_0^1 e^{-yx^2} dx, \qquad g_2(y) = \int_{\frac{1}{y}}^{y} e^{-x^2} dx, \qquad g_3(y) = \int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

(H 12) (Satz von Fubini; 3+3 Punkte)

(a) Es seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $I = [a,b] \times [c,d]$ ein Intervall in $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass

$$\int_I f(x)g(y)\, d(x,y) = \left(\int_a^b f(x) dx \right) \cdot \left(\int_c^d g(y) dy \right)$$

gilt.

(b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_I \sin(x+y) d(x,y) \text{ mit } I := \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

(H 13) (Satz von Fubini nicht anwendbar; 3+3 Punkte)

Gegeben seien das Intervall $I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ und die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{(x+y)^3} & \text{falls } (x,y) \in I \backslash \{0\} \\ 0 & \text{falls } (x,y) = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f in $(0,0)$ nicht stetig ist (und dass sie auch durch einen anderen Funktionswert in (0,0) nicht stetig gemacht werden kann).

(b) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\ dy \right) dx = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\ dx \right) dy = -\frac{1}{2}$$

gilt.

Erläutern Sie, warum die Funktion f nicht Riemann-integrierbar sein kann.

Hinweis: Benutzen Sie bei Teil (b) die Substitution $u = x + y$.