Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
René Hartmann
Michael Klotz
Tobias Hansel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
SS 2009 1.5.2009

Mathematik II für ET, WI(ET), SpoInf, iSt, BEd.ET, CE

3. Übung

Hausübungen

(H 8) Totales Differential (2+1+2 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f = (x_1 + x_2)^2,\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie mit dem Ansatz $x_j \leftarrow (x_j + \Delta_j)$ das totale Differential von f, ohne partielle Ableitungen zu benutzen!

b) Wie a) aber verwenden Sie partielle Ableitungen.

c) Weshalb gelangt man zum gleichen Resultat? Begründen Sie Ihre Antwort!

(H 9) Vertauschbarkeit von Ableitungen (2+3 Punkte)

(a) Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine Funktion, deren partiellen Ableitungen existieren und von der Sie die partielle Ableitung $f_x(x, y, z) = \sin(x)e^{yz}$ auf ganz $\mathbb{R}^3$ kennen. Existiert die partielle Ableitung f_{yx} zweiter Ordnung (also die partielle Ableitung von f_y nach x)? Berechnen Sie diese gegebenenfalls.

(b) Zeigen Sie, dass es keine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ geben kann, für die $f_x(x, y) = \sin(x)y$ und $f_y(x, y) = \cos(x)$ gelten. *Hinweis:* Sollten Sie Sätze aus dem Skript verwenden geben Sie bitte deren Eigennamen, falls sie einen besitzen sollten, z.B. "Satz von Schwartz", oder deren fortlaufende Nummer ("19.25") an, wenn Sie die vollen Hausaufgabenpunkte erhalten möchten.

(H 10) Potential oder keins? (1+3 Punkte)

Gegeben seien wieder die Funktionen aus Aufgabe (G2), für welche Sie jeweils zwei Wegintegrale von $(0, 0)$ nach $(1, 1)$ bestimmt haben.

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} 6xy - 1 + y^2 \\ 3x^2 + 15y^2 \end{pmatrix}, \quad G(x, y) = \begin{pmatrix} 12y^2 + 6x^2 \\ 24xy + 5y^4 \end{pmatrix}.$$

a) Begründen Sie ohne zu rechnen weshalb eine der beiden Funktionen - und welche - kein Potential besitzen kann.

b) In der Vorlesung haben Sie sich mit der Frage beschäftigt, wann genau ein Potential zu einem Vektorfeld existiert. Wenden Sie dieses Wissen auf F und G an. Zitieren Sie dabei Sätze aus dem Skript mit deren Eigennamen, falls sie einen besitzen sollten, z.B. "Satz von Schwartz", oder mit ihrer fortlaufenden Nummer ("Satz 19.25") wenn Sie volle Hausaufgabenpunkte erhalten möchten.