Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
Tobias Hansel
René Hartmann
Michael Klotz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 09 24.4.2009

Mathematik II für ET, WI(ET), SpoInf, IST, BEd.ET, CE

2. Übung

Gruppenübungen

(G 5) (Mengen im $\mathbb{R}^n$)

Skizzieren Sie die Mengen

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x|,|y|) < 2\}, \\ B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 2,\ y \leq 3\} \text{ und} \\ C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \geq 1\} \end{aligned}$$

und geben Sie jeweils (mit Begründung!) an, ob sie offen, abgeschlossen, beschränkt bzw. kompakt sind.

(G 6) (Funktionen in 2 Variablen)

Wir betrachten die folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{lll} f_1(x,y) = x + y - 1, & f_2(x,y) = x^2 + 4y^2, & f_3(x,y) = x^2 - y^2 - 8, \\ f_4(x,y) = \sin(x), & f_5(x,y) = \frac{1}{(1-x)(1-y)}, & f_6(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+10}, \\ f_7(x,y) = \ln(x^2+y^2), & f_8(x,y) = \tan(x^2+y^2), & f_9(x,y) = e^{x+y}, \\ f_{10}(x,y) = x^3 - y^2 + 4, & f_{11}(x,y) = \sin(x) \cdot \sin(y). & \end{array}$$

Die Graphen und Niveaumengen (Höhenlinien) dieser Funktionen sind auf dem Extrablatt angegeben. Allerdings ist die Reihenfolge etwas durcheinander geraten. Ordnen Sie den Graphen und Höhenlinien die richtigen Funktionen f_i ($i = 1, \ldots, 11$) zu.
Beachten Sie, dass die Auflösungsmöglichkeiten des Rechners begrenzt sind, so dass einige Bilder ungenau sind.
Zur Erinnerung: Die Niveaumenge (Höhenlinie) einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist die Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = c\}$ für vorgegebenes $c \in \mathbb{R}$

(G 7) (Niveaumengen, Stetigkeit)

Sei $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0\}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{y}.$$

Skizzieren Sie die Niveaumengen (Höhenlinien) $\{(x,y) : f(x,y) = c\}$ für die Werte $c = 1$, $c = 2$ und $c = 3$.
Ist f stetig auf D? Lässt sich f zu einer stetigen Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fortsetzen? Überlegen Sie sich dies zuerst anschaulich und versuchen Sie dies dann zu beweisen.

(G 8) (Partielle Ableitung)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \cos(x + y - 1) \cdot y^7 + \log(y) \cdot x^7 \cdot \log\left(1 + \frac{\sin^2(xy)}{1 + y^4}\right) \cdot \arctan\left(\frac{1 + x^2y^4}{3 + x^4}\right).$$

Bestimmen Sie $\frac{\partial}{\partial x} f(x, 1)$.
Hinweis: Es wird hier nicht verlangt, dass man $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ allgemein berechnet. Beachten Sie, dass beim partiellen Differenzieren nach x, die Variable y als konstant betrachtet wird.

Hausübungen

(H 5) (Stetigkeit und partielle Ableitungen; 6 Punkte)

Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3+y^2}{x^2+y^2} & \text{falls } x \neq 0 \text{ oder } y \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = y = 0 \end{cases}.$$

An welchen Stellen ist die Funktion f partiell differenzierbar? Berechnen Sie dort die partiellen Ableitungen.

(H 6) (Partielle Ableitung, Gradient, Richtungsableitung; 6 Punkte)

Berechnen Sie für die folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ jeweils alle partiellen Ableitungen, den Gradienten und die Richtungsableitung entlang der Diagonalen (d.h. in Richtung $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^{\mathrm{T}}$):

(i) $f_1(x, y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \quad (y \neq 0)$ (ii) $f_2(x, y) = 3\mathrm{e}^{xy} + 7x^2 + 3y^2x - 3$

(H 7) (Niveaumengen, Gradient; 2+2+1 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$g(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

für Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

(a) Skizzieren Sie die Niveaumengen (Höhenlinien) $\{(x, y) : g(x, y) = c\}$ für die Werte $c = 1$, $c = 2$ und $c = 3$.

(b) Berechnen Sie den Gradienten von g.

(c) Bestimmen Sie die Richtung des steilsten Anstiegs im Punkt $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.