Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
Tobias Hansel
René Hartmann
Michael Klotz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 09 17.7.2009

Mathematik II für ET, WI(ET), SpoInf, IST, BEd.ET, CE

14. Übung

Gruppenübungen

(G 49) (Implizite Funktionen)

Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = \sin^2 y + x^3 - 1$.

(a) Kann man für $(\sqrt[3]{0.5}, \pi/4)$ die Gleichung $g(x, y) = 0$ lokal nach y auflösen, d.h. gibt es eine geeignete Umgebung I von $\sqrt[3]{0.5}$, so dass in dieser Umgebung aus $g(x, y) = 0$ die Existenz einer differenzierbaren Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit $y = f(x)$ folgt?

(b) Berechnen Sie $f'(\sqrt[3]{0.5})$.

(G 50) (Lokale Umkehrbarkeit)

Zeigen Sie, dass die Abbildung $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

für jedes $(x, y) \neq (0, 0)$ lokal umkehrbar ist. Bestimmen Sie das Urbild $F^{-1}(\{(a, b)\})$ eines beliebigen Punktes $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

(G 51) (Implizite Funktionen)

Betrachten Sie das Gleichungsystem

$$\begin{aligned} 1 &= x^2 + 3y^2 + 6z^2, \\ 0 &= x + y + z\,. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass dieses System in einer Umgebung U des Punktes $(0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ eindeutig nach y, z aufgelöst werden kann, d.h. es gibt eine Funktion $f = (f_1, f_2) : U \to \mathbb{R}^2$, so dass $x, y = f_1(x)$, $z = f_2(x)$ das System löst.

(b) Berechnen Sie $f'(0)$.