Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
Tobias Hansel
René Hartmann
Michael Klotz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 09 3.7.2009

Mathematik II für ET, WI(ET), SpoInf, IST, BEd.ET, CE

12. Übung

Gruppenübungen

(G 41) (Bilinearformen)

Gegeben sei ein 2-dimensionaler reeller Vektorraum mit einer orthonormal Basis α. Bezüglich dieser Basis α sind die folgenden Funktionen $\Phi_i : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, 3)$ gegeben:

(i) $\Phi_1(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_2 + 3x_2y_1$

(ii) $\Phi_2(\vec{x}, \vec{y}) = x_1x_2 + y_1y_2$

(iii) $\Phi_3(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_2 - 2x_2y_1$

Begründen Sie, ob es sich jeweils um eine Bilinearform handelt und geben Sie gegebenenfalls die Gram-Matrix bezüglich der Basis α an.

(G 42) (Hauptachsentransformation)

In der Ebene sei eine quadratische Form Q bezüglich einer orthonormal Basis α durch $Q(\vec{x}) = 3x_1^2 + 4x_1x_2$ gegeben. Führen Sie für diese Form eine Hauptachsentransformation durch. Gehen sie folgendermaßen vor:

(a) Geben Sie die Gram-Matrix der zugehörigen Bilinearform Φ an.

(b) Wir suchen nun eine orthonormal Basis $\beta = \{\vec{v}, \vec{w}\}$, so dass die Gram-Matrix der Bilinearform Φ bezüglich der Basis β diagonal ist, d.h. $\Phi(\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}^\alpha)^t A\vec{w}^\alpha = 0$. Machen Sie dafür den Ansatz $\vec{v}^\alpha = (v_1, v_2)^t$, $\vec{w}^\alpha = (-v_2, v_1)^t$ (dieser Ansatz garantiert gerade, dass $\vec{v}$ und $\vec{w}$ orthogonal sind) und gewinnen Sie daraus eine quadratische Gleichung für die Koordinaten v_1, v_2 von v bezüglich α.

(c) Lösen Sie diese Gleichung. Tipp: Leiten Sie eine Gleichung für $t = \frac{v_2}{v_1}$ her und lösen Sie diese. Verifizieren Sie ihr Ergebnis.

(d) Geben Sie ein Hauptachsensystem β bezüglich der Basis α an und zeichnen Sie dieses ein.

(e) Bestimmen Sie die Hauptmomente λ_1, λ_2 und geben Sie die Form im Hauptachsensystem an.

(f) Zeichnen Sie die Höhenlinien zur Höhe 1 ein.

(g) Hat Q an der Stelle 0 ein lokales Minimum oder Maximum? Wo hat Q auf der Menge $\{\vec{x} : \|\vec{x}\| = 1\}$ ein Maximum bzw. Minimum?

(G 43) (Symmetrischer Gauß)

Es sei Φ eine Bilinearform mit Gram-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix S mit SAS^t diagonal. Ist die zu Φ gehörige quadratische Form Q positiv oder negativ definit?

Hausübungen

(H 36) (Quadratische Form I; 1+2+2+1 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 3 \\ b & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die zu A gehörige quadratische Form $Q_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

(b) Wählen Sie nun $b = 2$ und entscheiden Sie, für welche Werte des reellen Parameters a die Matrix A positiv definit ist.

(c) Zeigen Sie, dass A nicht negativ definit sein kann.

(d) Geben Sie geeignete Werte für die Parameter a und b an, so dass A indefinit ist.

(H 37) (Quadratische Form II; 3 Punkte)

Betrachten Sie die quadratische Form $Q_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit der Zuordnungsvorschrift

$$Q_A(\vec{x}) = 7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3.$$

Geben Sie die Gram-Matrix A der zugehörigen Bilinearform an und entscheiden Sie, ob A positiv oder negativ definit ist.

(H 38) (Hauptachsentransformation; 2+4+3+3 Punkte)

Im Raum sei eine orthonormal Basis α und die quadratische Form Q gegeben, so dass bezüglich der Koordinaten von α

$$Q(\vec{x}) = -\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + 2x_3^2 + x_1x_2$$

gilt. Bestimmen Sie ein Hauptachsensystem von Q. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

(a) Zeigen Sie, dass für den Vektor $\vec{v}_1 = (0, 0, 1)^t$ die quadratische Form $Q(\vec{x})$ ihr Maximum unter der Nebenbedingung $\|\vec{x}\| = 1$ annimmt.

(b) Betrachten Sie die Einschränkung Q' von Q auf den Unterraum der von $\vec{v}_2 = (1, 0, 0)^t$ und $\vec{v}_3 = (0, 1, 0)^t$ aufgespannt wird:

$$Q'(x_1, x_2) = -\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + x_1x_2.$$

Geben Sie für Q' ein Hauptachsensystem an (Gehen Sie wie in Aufgabe G42 vor). Bestimmen Sie die Hauptmomente von Q' und zeichnen Sie die Höhenlinien von Q' zur Höhe 1.

(c) Geben Sie nun das Hauptachsensystem und die Hauptmomente von Q an.

(d) Bestimmen Sie den Definitheitstyp sowie den Flächentyp der Kennfläche der Form.