Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
Tobias Hansel
René Hartmann
Michael Klotz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 09 26.6.2009

Mathematik II für ET, WI(ET), SpoInf, IST, BEd.ET, CE

11. Übung

Gruppenübungen

(G 37) (Eigenwerte & Eigenvektoren geometrisch)

Sei $a \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und $\alpha \in [0, 2\pi)$. Bezeichne φ die lineare Abbildung, die eine Drehung um den Vektor a mit dem Winkel α darstellt. Sei $E_a = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid a^T x = 0\}$ die durch den Normalenvektor a definierte Ebene und ψ die lineare Abbildung, die eine Spiegelung an jener beschreibt.
Geben Sie die reellen Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren von φ und ψ an. Verzichten Sie dabei auf eine explizite Berechnung der darstellenden Matrizen, sondern schließen Sie dies aus geometrischen Überlegungen.

(G 38) (Eigenwerte & Eigenvektoren)

Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren.

(c) Geben Sie eine Diagonalmatrix D und eine Matrix S an, so dass $S^{-1}AS = D$ gilt.

(G 39) (Bestimmung einer Jordannormalform)

Betrachten Sie die Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte (mit algebraischer und geometrischer Vielfachheit) sowie die Eigenvektoren von B.

(ii) Wie muss die Jordannormalform von B aussehen? (Dies können Sie aus (i) schließen)

(iii) Kann man den Eigenvektor $(1, 0, 0)^\mathrm{T}$ zu einer Jordankette der Länge 2 ergänzen?

(iv) Was wäre eine bessere Vorgehensweise, um eine Jordankette der Länge 2 zum Eigenwert 1 zu bestimmen? Schreiben Sie dazu hin, was für zwei Vektoren v_1, v_2 gelten muss, damit v_1, v_2 eine Jordankette bilden. Geben Sie dann eine solche Jordankette v_1, v_2 an.

(v) Ergänzen Sie nun v_1, v_2 durch einen linear unabhängigen Eigenvektor zu einer Basis $\{v_1, v_2, v_3\}$ und geben Sie die Matrix B bezüglich dieser Basis an.

(G 40) (Jordannormalform)

Geben Sie reelle Matrizen A_i in Jordannormalform mit den folgenden Eigenschaften an:

(a) A_1 hat Eigenwert 1 mit algebraischer Vielfachheit 3 und geometrischer Vielfachheit 1.

(b) A_2 hat Eigenwert -1 mit algebraischer Vielfachheit 3 u. geometrischer Vielfachheit 2.

(c) A_3 hat Eigenwert 2 mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1 und Eigenwert -2 mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1.

Hausübungen

(H 33) (Eigenwerte & Eigenvektoren; 3+3 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(x) = Bx$ mit

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ist eine Drehung um eine Achse. Bestimme die Richtung der Drehachse und den Drehwinkel.

(H 34) (Jordannormalform; 2+2+2 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils eine Jordannormalform J der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(H 35) (Jordannormalform; 2+2+2 Punkte)

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ besitze die Eigenwerte 1 und -1. Geben Sie eine Jordannormalform von A an für den Fall, dass

(i) die algebraische Vielfachheit sowie die geometrische Vielfachheit beider Eigenwerte zwei ist,

(ii) die algebraische sowie die geometrische Vielfachheit vom Eigenwert 1 eins ist und die algebraische Vielfachheit vom Eigenwert -1 drei und die geometrische zwei ist,

(iii) die algebraische sowie die geometrische Vielfachheit vom Eigenwert 1 eins ist und die algebraische Vielfachheit vom Eigenwert -1 drei und die geometrische eins ist.