Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
Dipl.-Math. Tobias Hansel
Dipl.-Math. Rene Hartmann
Dipl.-Math. Michael Klotz

Technische Universität Darmstadt

SS 2009
19.06.2009

10. Übungsblatt zur „Mathematik II für ET, WI(ET), SpoInf, IkT, IST, CE, Mechatronik"

Gruppenübung

Aufgabe G33 (Fourierreihen und Berechnung von Reihen)

Bezeichne $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, für die $f(x) = x^2$ für alle $x \in [-\pi, \pi]$ gilt.

(a) Skizzieren Sie die Fourierreihe auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$.

(b) Berechnen Sie die Fourierreihe von f.

(c) Konvergiert die Fourierreihe? Wenn ja, wie sieht die Grenzfunktion aus?

(d) Bestimmen Sie mithilfe Ihrer Ergebnisse den Wert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Aufgabe G34 (Näherungsweise Gleichheit von Potenzreihen)

(a) Bestimmen Sie für die Potenzreihen $\Phi := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-10)^k$ und $\Psi := \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(x-10)^k$ mit

$$a_k = \begin{cases} k^2 & \text{für } k < 20 \\ \sin(k) & \text{für } k \geq 20 \end{cases}$$

näherungsweise ($\approx_{10}^{3}$) Summe und Produkt.

(b) Bestimmen Sie näherungsweise ($\approx_{100}^{2}$) die Substitution von $\Phi := \sum_{k=0}^{\infty}(1+k)(x-100)^k$ in $\Psi := \sum_{k=0}^{\infty}(x-1)^k$, d. h.

$$\sum_{k=0}^{\infty}(x-1)^k \circ \sum_{k=0}^{\infty}(1+k)(x-100)^k.$$

Anmerkung: Beachten Sie, dass die Substitution nur deshalb definiert ist, weil der Wert der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty}(1+k)(x-100)^k$ für $x = 100$ (also der Koeffiezient vor der Potenz $(x-100)^0$) gerade 1 ist und daher mit dem Entwicklungspunkt der anderen Potenzreihe übereinstimmt.

Aufgabe G35 (Taylorpolynome von verketteten Funktionen)

Gegeben sei die Funktion $f\colon]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R},\ f(x) := \cos(x)$ und die natürliche Logarithmusfunktion ln. Wir berechnen für die verkettete Funktion $x \mapsto \ln(f(x))$ das Taylorpolynom $j_p^n(\ln \circ f)$ vom Grad $n = 2$ am Entwicklungspunkt $p = 0$ auf zwei verschieden Weisen.

(a) Bestimmen Sie die Koeffizienten a_k in der Formel $j_p^n(\ln \circ f)(x-p) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-p)^k$ mittels der Ableitungen $a_k = \frac{1}{k!}(\ln \circ f)^{(k)}(p)$.
(Alternative Notation: $j_p^n(\ln \circ f)(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$.)

(b) Verwenden Sie die Ihnen bereits bekannten Taylorentwicklungen $j_1(\ln)$ und $j_0(f)$ und lösen Sie das Problem mittels Substitution von Potenzreihen, d. h.

$$j_p^n(\ln \circ f)(x-p) \approx_p^n \big(j_q^n(\ln) \circ (j_p^n(f) - q)\big)(x-p)$$

mit $q = f(p) = 1$.
alternative Schreibweise: $j_p^n(\ln \circ f)(t) \approx_0^n \big(j_q^n(\ln) \circ (j_p^n(f) - q)\big)(t)$

Aufgabe G36 (Nutzen der gleichmäßigen Konvergenz)
Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^\pi \frac{\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)}{1-e^{-xn}}\, dx.$$

Hinweis: Da man für $\frac{\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)}{1-e^{-xn}}$ nicht ohne weiteres eine Stammfunktion hinschreiben kann, würde man gerne Integration und Grenzwertbildung vertauschen. Dies geht aber nur, wenn gleichmäßige Konvergenz vorliegt, was zunächst nachgewiesen werden muss.

Hausübung

Aufgabe H31 (Fourierreihen und Berechnung von Reihen) (1+6+2+3 Punkte)
Bezeichne $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, für die

$$f(x) = \begin{cases} \pi & \text{falls } -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{falls } 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

gilt.

(a) Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$.

(b) Berechnen Sie die Fourierreihe von f.

(c) Konvergiert die Fourierreihe? Wenn ja, wie sieht die Grenzfunktion aus?

(d) Bestimmen Sie mithilfe Ihrer Ergebnisse den Wert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Aufgabe H32 (Taylorpolynome von verketteten Funktionen) (2+3 Punkte)
Wir berechnen für die verkettete Funktion $\cos \circ \ln$ das Taylorpolynom $j_p^n(\cos \circ \ln)$ vom Grad $n = 2$ am Entwicklungspunkt $p = 1$ auf zwei verschieden Weisen.

(a) Bestimmen Sie die Koeffizienten a_k in der Formel $j_p^n(\cos \circ \ln)(x-p) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-p)^k$ mittels der Ableitungen $a_k = \frac{1}{k!}(\cos \circ \ln)^{(k)}(p)$.

(b) Verwenden Sie die Ihnen bereits bekannten Taylorentwicklungen $j_1(\ln)$ und $j_0(\cos)$ und lösen Sie das Problem mittels Substitution von Potenzreihen.

Abgabe der Hausübungen: Am Freitag den 26. Juni 2009 vor der Übung.
(Hinweise auf Fehler bei diesen Aufgaben bitte an Michael Klotz, kl...@math...tik.tu-darmstadt.de)