Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
René Hartmann
Michael Klotz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009 17.4.2009

Mathematik II für ET, WI(ET), SpoInf, iSt, BEd.ET, CE

1. Übung

Gruppenübungen

(G 1) Rektifizierbarkeit & Bogenlänge

a) Bestimmen Sie die Bogenlänge der beiden Wege

(i) $\vec{f} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\vec{f}(t) = (r\cos t, r\sin t, ct)$, wobei $r, c > 0$.

(ii) $\vec{g} : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, $\vec{g}(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$.

Skizzieren Sie $\vec{f}$ für die Parameter $r = 1, c = 1/(2\pi)$.

b) Sei $a < b \in \mathbb{R}$ und $\vec{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz-stetige Funktion mit Lipschitz Konstante c:

$$\|\vec{f}(x) - \vec{f}(y)\| \leq c|x - y|.$$

Beweisen Sie:

i) $\vec{f}$ ist rektifizierbar.

ii) Es gilt $L(\vec{f}) \leq c(b - a)$.

(G 2) Wegintegrale

Gegeben seien die Funktionen

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} 6xy - 1 + y^2 \\ 3x^2 + 15y^2 \end{pmatrix}, \quad G(x, y) = \begin{pmatrix} 12y^2 + 6x^2 \\ 24xy + 5y^4 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie das Integral von F entlang zweier verschiedener Wege von $(0, 0)$ nach $(1, 1)$, die Sie sich frei aussuchen dürfen! Skizzieren Sie kurz Ihre beiden Wege. Hängt das Integral von dem Weg ab?

b) Wie a) nur für die Funktion G anstelle von F. Wie verhält es sich hier mit der Abhängigkeit vom gewählten Weg?

(G 3) Minitest

Überlege kurz(!), welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch ist. (Der Minitest soll nicht mehr als **5 Minuten** in Anspruch nehmen.)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- ☐ Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.
- ☐ Wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.
- ☐ Wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine positive Nullfolge.

(G 4) Reihen

Überprüfen Sie anhand geeigneter Kriterien, ob die folgenden Reihen konvergieren bzw. absolut konvergieren. Bestimmen Sie für (i) und (v) den Grenzwert der Reihe.

$$
\begin{array}{llll}
(i) & \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2+(-3)^k}{4^k} & (ii) & \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n} \\
(iii) & \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n & (iv) & \sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \\
(v) & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{28+(-3)^{k-1}}{4^{k+2}} & (vi) & \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}.
\end{array}
$$

Hausübungen

(H 1) Herzkurve (6 Punkte)

Es sei $r(\varphi) = 2a(1 + \cos(\varphi))$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $a > 0$. Der durch

$$\vec{k}(\varphi) = r(\varphi) \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} = a \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) \end{pmatrix} \right]$$

gegebene Weg heisst *Kardioide*. Skizzieren Sie $\vec{k}$ und berechnen Sie seine Länge!

Hinweis: $2\sin(t)\cos(t) = \sin(2t)$, $\cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos(2t)$, $\cos(t) = 1 - 2\sin^2(t/2)$.

(H 2) Wegintegral (6 Punkte)

Es sei $\vec{w}_1$ der durch $\vec{w}_{1,1} : (0, t), t \in [0, 1]$ und $\vec{w}_{1,2} : (t-1, 2-t), t \in [1, 2]$ zusammengesetzte Weg. Ferner sei $\vec{w}_2$ der Weg von $(0, 0)$ nach $(1, 0)$, der sich aus dem durch (t^2, t) mit $t \in [0, 1]$ parametrisierten Weg $\vec{w}_{2,1}$ und dem Geradenstück $\vec{w}_{2,2}$ von $(1, 1)$ nach $(1, 0)$ ergibt. Berechnen Sie die Wegintegrale

$$\int_{\vec{w}_j} F \cdot d\vec{x}, \quad j \in \{1, 2\},$$

für das Vektorfeld

$$F(x, y) = (2xy - x^2,\, x + y^2).$$

(H 3) Absolut konvergent, konvergent, divergent (5 Punkte)

Entscheide, ob die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, konvergent oder divergent ist für

$$(a)\ a_k = (-1)^k, \quad (b)\ a_k = (-1)^k\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}\right), \quad (c)\ a_k = \frac{(-17)^k}{k!}.$$

(H 4) Majoranten und Minoranten (4 Punkte)

Finden Sie für die folgenden Reihen eine Majorante bzw. eine Minorante, von der bekannt ist, daß sie konvergiert bzw. divergiert.

$$1.\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k + \sqrt{k}}{k^3 + 2k^2 + 5k - 1}, \qquad 2.\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + \sqrt{k}}{k^3 + 2k^2 + 5k - 1}.$$