Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Tobias Hansel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 Februar 2009

Analysis III – Gewöhnliche Differentialgleichungen

Ferienübung

Aufgabe 1

Finden Sie Lösungen für die folgenden Anfangswertprobleme und geben Sie die maximalen Existenzintervalle der Lösungen an:

(a) $y'(t) = te^t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad y(0) = -1,$

(b) $y'(t) = y^2(t) + 1, \quad t \in \mathbb{R}, \quad y(\frac{\pi}{4}) = -1,$

(c) $y'(t) = \cos(t)y(t) + t^2 e^{\sin(t)}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad y(\pi) = -1,$

(d) $y'(t) = e^{t-y(t)-e^{y(t)}}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad y(1) = 0,$

(e) $y'(t) = -y(t) + t^2, \quad t \in \mathbb{R}, \quad y(0) = 10.$

Aufgabe 2

Es sei $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie: Sind $y_1, y_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ Lösungen von $y'(x) = f(x,y),\ x \in [a,b]$, so ist auch $y = \max\{y_1, y_2\}$ eine Lösung derselben Differentialgleichung.

Aufgabe 3

Gegeben sei die Differentialgleichung $y'(t) = 1 + \frac{y(t)}{t}$.

(a) Zeigen Sie: Ist $y(t)$ eine Lösung auf $(0,\infty)$, so ist $-y(-t)$ eine Lösung auf $(-\infty, 0)$.

(b) Berechnen Sie alle auf $(0,\infty)$ definierten Lösungen.

Aufgabe 4

Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die einer lokalen Lipschitzbedingung genügt. Ferner sei f in der ersten Komponente periodisch mit Periode k, d.h

$$f(t+k, y) = f(t,y) \quad \text{für alle } (t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Sei $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine globale Lösung der Differentialgleichung $y'(t) = f(t,y)$. Weiterhin gibt es ein $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $u(t_0 + k) = u(t_0)$. Zeigen Sie, dass u periodisch mit Periode k ist.

Aufgabe 5

Beweisen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y'(t) = t - y^2(t), \quad y(0) = 0$$

auf einem Intervall der Form $[-\alpha, \alpha]$ mit $\alpha > 0$ eine eindeutige Lösung u besitzt.

Aufgabe 6

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) &= t\sin\sqrt{1+y(t)^2}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ y(0) &= 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) Es existiert ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ so, dass das Anfangswertproblem genau eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ besitzt.

(b) Die Lösung aus (a) genügt der Abschätzung

$$|y(t) - 1| \leq \frac{t^2}{2}, \quad t \in I.$$

(Hinweis: Benutzen Sie die Äquivalenz der Differentialgleichung mit ihrer Integraldarstellung).

(c) Die Lösung y aus Teil (a) ist gerade, d.h. es gilt $y(-t) = y(t)$ für alle $t \in I$.

Aufgabe 7

Es sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ und $u(t,\lambda), (t,\lambda) \in \mathbb{R}^2$, die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = y(t) + f(\lambda t), \qquad y(\lambda) = \lambda.$$

Berechnen Sie $u_\lambda(t,\lambda)$,

(a) durch Differenzieren der Lösung,

(b) durch Differenzieren der Differentialgleichung nach λ und Lösen des Anfangswertproblems für u_λ.

Hinweis: u_λ bezeichnet die Ableitung von u bzgl. λ.

Aufgabe 8

Betrachten Sie das 2-dimensionale lineare System

$$\begin{cases} y'(t) &= Ay(t), \quad t \geq 0, \\ y(0) &= x, \end{cases}$$

wobei $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ und $x \in \mathbb{R}^2$.

(a) Berechnen Sie explizit die Lösung u des Anfangswertproblems.

(b) Skizzieren Sie das Phasenbild der Differentialgleichung $y'(t) = Ay(t)$.

Aufgabe 9

Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem für das System $y'(t) = Ay(t)$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 10

(a) Geben Sie eine Lösung u des Anfangswertproblems

$$y'(t) = Ay(t), \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

an, wobei $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$.

(b) Wieviele Lösungen besitzt das Anfangswertproblem (1)? Begründen Sie Ihre Antwort!

(c) Entscheiden Sie, ob jede Lösung der Gleichung $y'(t) = Ay(t)$, wobei A wie in (a), stabil, asymptotisch stabil oder instabil ist.

Aufgabe 11

Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen A, ob die Nulllösung für das System $y'(t) = Ay(t)$ stabil, asymptotisch stabil oder instabil ist.

$$\text{a)} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3i-6 & i-3 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \quad A = \begin{pmatrix} 3i - \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 3i + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 12

Geben Sie für die folgenden linearen Systeme das Phasenpotrait an und bestimmen Sie jeweils das Stabilitätsverhalten der Nulllösung.

(a) $x'(t) = 2x(t), \qquad y'(t) = 4x(t) + y(t).$

(b) $x'(t) = -4x(t) + 3y(t), \qquad y'(t) = -2x(t) + y(t).$

(c) $x'(t) = -x(t) - 2y(t), \qquad y'(t) = 4x(t) - 5y(t).$

(d) $x'(t) = 2x(t) - 4y(t); \qquad y'(t) = 2x(t) - 2y(t).$

Aufgabe 13

Untersuchen Sie die kritischen Punkte der autonomen Differentialgleichung

$$y'(t) = (y(t) - 1)(y(t) - 2)(y(t) - 3)$$

auf ihr Stabilitätsverhalten.

Aufgabe 14

Untersuchen Sie jeweils die Nulllösungen der gestörten Systeme $y'(t) = Ay(t) + f_j(t)$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $f_j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $(j = \{1, 2, 3\})$

(i) $f_1(y_1, y_2) = (-y_1^3 - y_1 y_2^2, -y_2^3 - y_1^2 y_2)^{\mathrm{T}}$

(ii) $f_2(y_1, y_2) = (y_1^3 + y_1 y_2^2, y_2^3 + y_1^2 y_2)^{\mathrm{T}}$

(iii) $f_3(y_1, y_2) = (-y_1 y_2, y_1^2)^{\mathrm{T}}$

auf ihr Stabilitätsverhalten. Verwenden Sie dazu die Ljapunov-Funktion $L(x) := \frac{1}{2}|x|^2$. Warum lässt sich hier nicht das Prinzip der linearisierten Stabilität anwenden?

Aufgabe 15

Gegeben sei das Gradientensystem

$$y'(t) = -\nabla g(y(t)),$$

wobei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $g(y_1, y_2) = y_1^8 + 5y_1^6 + 2y_1^4 + 3y_1^2 + 7y_2^4 + 2y_2^2$ gegeben ist. Zeigen Sie, dass die Nulllösung asymptotisch stabil ist.