Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Tobias Hansel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 3./4.2.2009

Analysis III – Gewöhnliche Differentialgleichungen

7. Übung

Gruppenübungen

(G 1) (Lorenz-System)

Das *Lorenz-System* (vgl. Vorlesung bzw. Skript Kapitel IV) ist gegeben durch

$$\begin{cases} x'(t) &= c_1(y(t)-x(t)), \\ y'(t) &= c_2x(t)-y(t)-x(t)z(t), \\ z'(t) &= x(t)y(t)-c_3z(t), \end{cases} \tag{1}$$

mit Konstanten $c_1, c_2, c_3 > 0$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Für $0 < c_2 < 1$ ist die Nulllösung von (1) asymptotisch stabil.

(ii) Für $c_2 > 1$ ist die Nulllösung von (1) instabil.

Was lässt sich im Fall $c_2 = 1$ aussagen?

Hinweis: Um Aussage (i) zu beweisen, benutzen Sie, wie im Skript Kapitel IV angegeben, die Ljapunov-Funktion $L(x, y, z) := x^2 + c_1y^2 + c_1z^2$.

(G 2)

Sei $L > 0$. Wir betrachten das folgende Eigenwertproblem

$$\begin{cases} y''(t)+\lambda y(t) &= 0, \qquad t \in (0, L), \\ y(0) &= 0, \\ y(L) &= 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass für $\lambda \le 0$ nur die triviale Lösung $u \equiv 0$ exisitiert.

(b) Geben Sie alle $\lambda > 0$ an, für die nichttriviale Lösungen, d.h. Lösungen $u \not\equiv 0$, existieren und geben Sie außerdem in diesen Fällen jeweils eine Lösung an.

Bemerkung: In dieser Aufgabe haben Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren des eindimensionalen *Laplace-Operators* auf einem Intervall $[0, L]$ berechnet.

(G 3)

Gegeben seien die folgenden beiden Differentialgleichungssysteme:

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} x'(t) &= x(t)y^2(t)+x^2(t)y(t)+x^3(t), \\ y'(t) &= -x^3(t)+y^3(t), \end{cases} \qquad \text{(ii)} \quad \begin{cases} x'(t) &= -2x(t)y(t), \\ y'(t) &= x^2(t)-y^3(t). \end{cases}$$

Bestimmen Sie jeweils das Stabilitätsverhalten der Nulllösung. Betrachten Sie dazu Funktionen der Form $L(x, y) := ax^2 + by^2$, wobei a, b Konstanten sind, die noch gewählt werden müssen.

(G 4)

Gegeben sei das Randwertproblem

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) &= 1, \qquad t \in (0, \frac{\pi}{2}), \\ y(0) &= 0, \\ y(\frac{\pi}{2}) &= 0. \end{cases} \tag{2}$$

(a) Überführen Sie dieses Randwertproblem in die äquivalente Form

$$\begin{cases} u'(t) &= Fu(t) + g(t), \qquad t \in (0, \frac{\pi}{2}), \\ Au(0) + Bu(\frac{\pi}{2}) &= 0. \end{cases} \tag{3}$$

für geeignete $A, B, F \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ und $g \in C([0, \frac{\pi}{2}], \mathbb{C}^2)$.

(b) Geben Sie die charakteristische Matrix für Problem (3) an. Ist diese invertierbar? Vergleichen Sie ihre Beobachtung mit Aufgabe G2.

(c) Bestimmen Sie die Greensche Funktion und geben Sie anschließend die Lösung von System (3) an.