Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Tobias Hansel

Analysis III – Gewöhnliche Differentialgleichungen

6. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

Gegeben sei das System 1. Ordnung

$$\begin{cases} x'(t) &=& a(y(t)-x(t)), \\ y'(t) &=& bx(t)-y(t)-x(t)z(t), \\ z'(t) &=& x(t)y(t)-cz(t), \end{cases}$$

für $t \geq 0$, wobei $a, c > 0$ und $0 \leq b < 1$ Konstanten sind.

(a) Zeigen Sie, dass $(0,0,0)$ ein kritischer Punkt des Systems ist.

(b) Geben Sie die Linearisierung im kritischen Punkt $(0,0,0)$ an.

(c) Was lässt sich über das Stabilitätsverhalten der Nulllösung aussagen?

(d) Was lässt sich im Fall $b = 1$ mit Hilfe der linearisierten Stabilität über das Stabilitätsverhalten der Nulllösung aussagen?

(G 2)

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die folgenden Differentialgleichungen:

(i) $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 0, \quad t \geq 0,$ (ii) $y'''(t) - 2y''(t) + 2y'(t) - y(t) = 0, \quad t \geq 0.$

(G 3)

Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie:

(a) Aus der Stabiltät der Nulllösung des Systems $y'(t) = Ay(t)$ folgt im Allgemeinen nicht die Attraktivität der Nulllösung.

(b) Ist die Nulllösung des Systems $y'(t) = Ay(t)$ attraktiv, so ist sie stets auch stabil, damit also asymptotisch stabil.

Bemerkung: Im Allgmeinen folgt aus der Attraktivität einer Lösung nicht die Stabilität der Lösung.

Hausübungen

(H 1)

Wir betrachten die folgenden beiden Systeme nichtlinearer Differentialgleichungen

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} x'(t) &= -y(t) + x^3(t), \\ y'(t) &= x(t) + y^3(t), \end{cases} \qquad \text{(ii)} \quad \begin{cases} x'(t) &= -y(t) - x^3(t), \\ y'(t) &= x(t) - y^3(t), \end{cases}$$

für $t \geq 0$.

(a) Zeigen Sie, dass beide Systeme $(0,0)$ als einzigen kritischen Punkt haben.

(b) Zeigen Sie, dass eine Linearisierung im kritischen Punkt $(0,0)$ jeweils auf das lineare System

$$\text{(iii)} \quad \begin{cases} x'(t) &= -y(t), \\ y'(t) &= x(t), \end{cases}$$

führt.

(c) Geben Sie das Phasenpotrait für System (iii) an? Was lässt sich über das Stabilitätsverhalten der Nulllösung von System (iii) aussagen?

(d) Was lässt sich über das Stabilitätsverhalten der Nulllösungen der Systeme (i) und (ii) aussagen? Betrachten Sie dazu, die Funktion $r(t) := \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$, die den Abstand des Punktes $(x(t), y(t))$ zum Nullpunkt misst. Steht das Stabilitätsverhalten der Nulllösungen im Widerspruch zum Prinzip der linearisierten Stabilität (Kapitel IV, Theorem 1.3)?

(H 2)

Betrachten Sie das System

$$\begin{cases} x'(t) &= 2(x(t) + y(t) - x(t)y(t) - x^2(t)), \\ y'(t) &= -2z(t) - y(t) - x(t)y(t), \\ z'(t) &= x(t) - z(t), \end{cases}$$

für $t \geq 0$ und bestimmen Sie das Stabilitätsverhalten der Nulllösung.

(H 3) (Mathematisches Pendel mit Reibung)

Im Skript, Kapitel IV wird die Gleichung des mathematischen Pendels ohne Reibung diskutiert. Die Gleichung des mathematischen Pendels mit Reibung lautet

$$u''(t) + \varepsilon u'(t) + \sin u(t) = 0, \quad t \geq 0,$$

wobei $\varepsilon > 0$ gilt.

(a) Überführen Sie diese Gleichung in das zugehörige System 1. Ordnung $v'(t) = f(v(t))$.

(b) Bestimmen Sie die kritischen Punkte des Systems $v'(t) = f(v(t))$.

(c) Bestimmen Sie das Stabilitätsverhalten der kritischen Punkte.