Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Tobias Hansel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 16./17.12.2008

Analysis III – Gewöhnliche Differentialgleichungen

5. Übung

Gruppenübungen

(G 1) (Lineare DGLen mit konstanten Koeffizienten)

(a) Bestimmen Sie jeweils ein Fundamentalsystem für die folgenden Differentialgleichungssysteme:

1. $$\begin{cases} y_1'(t) &=& y_1(t) + y_2(t), \\ y_2'(t) &=& y_2(t), \\ y_3'(t) &=& 2y_3(t), \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} y_1'(t) &=& y_1(t) - y_2(t), \\ y_2'(t) &=& 4y_1(t) - 3y_2(t). \end{cases}$$

(b) Ist die Nulllösung jeweils stabil, instabil oder asymptotisch stabil?

(G 2) (Phasenbilder)

Skizzieren Sie das Phasenbild des Systems

$$\begin{cases} y_1'(t) &=& -y_1(t) + (\alpha + 1)y_2(t), \\ y_2'(t) &=& (\alpha - 1)y_2(t), \end{cases}$$

für die Parameterwerte $\alpha = -1$ und $\alpha = 0$.

(G 3) (Stabilität)

Es sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Zeigen Sie: Ist die Nulllösung des Systems $y' = Ay$ stabil (instabil, asymptotisch stabil), so ist jede Lösung des Systems stabil (instabil, asymptotisch stabil).

Hausübungen

(H 1) (Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten)

Bestimmen Sie die Lösung des folgenden inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$\begin{cases} y_1'(t) &=& -4y_1(t) + 3y_2(t) + e^t, \\ y_2'(t) &=& -10y_1(t) + 7y_2(t) + t, \end{cases}$$

mit der Anfangsbedingung $y_1(0) = y_2(0) = 1$.

(H 2) (Stabilität)

(a) Zeigen Sie, dass jede Lösung der Gleichung

$$y'(t) = Ay(t) \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -2 \\ -6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

instabil ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede Lösung der Gleichung

$$y'(t) = Ay(t) \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

stabil aber nicht asympotitisch stabil ist.

(c) Entscheiden Sie, ob jede Lösung der Gleichung

$$y'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} y(t)$$

stabil, asymptotisch stabil oder instabil ist.

(H 3) (Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten)

Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem sowie die Lösung von

$$y'(t) = Ay(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} y(t), \qquad y(0) = y_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(H 4) (Zusatzaufgabe außerhalb der Wertung)

Machen Sie sich mit Maple, insbesondere mit dem Befehl „phaseportrait“ aus dem Paket „DEplot“ vertraut und lassen Sie damit die Phasenportraits der Gleichung $y'(t) = Ay(t)$ mit

$$\text{(a)} \quad A = \begin{pmatrix} -5/3 & 8/3 \\ -5/3 & -1/3 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \quad A = \begin{pmatrix} -4/3 & 1/3 \\ 2/3 & -5/3 \end{pmatrix}$$

zeichnen.