Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Tobias Hansel

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 08/09 2./3.12.2008

Analysis III – Gewöhnliche Differentialgleichungen

4. Übung

Gruppenübungen

(G 1) (Reduktionsverfahren von d'Alembert)

(a) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} : I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$$

eine stetige Abbildung. Die Differentialgleichung $y'(t) = A(t)y(t)$ besitze die spezielle Lösung $\phi = \binom{\phi_1}{\phi_2} : I \to \mathbb{R}^2$. Im Teilintervall $J \subseteq I$ gelte $\phi_1(t) \neq 0$ für alle $t \in J$. Zeigen Sie: Man erhält eine zweite Lösung $\psi : J \to \mathbb{R}^2$ durch den Ansatz

$$\psi(t) = u(t)\begin{pmatrix}\phi_1(t) \\ \phi_2(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g(t)\end{pmatrix},$$

wobei $u, g : J \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen sind, die den folgenden Differentialgleichungen genügen:

$$g' = \left(a_{22} - a_{12}\frac{\phi_2}{\phi_1}\right) g, \quad u' = \frac{a_{12}}{\phi_1} g.$$

(b) Nun betrachten wir für $t > 0$ das folgende homogene Differentialgleichungssystem:

$$\begin{cases} y_1' = \frac{1}{t}y_1 - y_2 \\ \\ y_2' = \frac{1}{t^2}y_1 + \frac{2}{t}y_2 \end{cases}$$

Schreiben Sie dieses System in Matrix-Form und geben Sie ein Fundamentalsystem an. Verwenden Sie dabei die Methode aus Teil (a).

(G 2) (Wronski-Determinante / Fundamentalsystem)

(a) Es sei $A : [0, \infty) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ stetig mit spur $A(t) \leq -\frac{1}{t+1}$ für $t \in [0, \infty)$, und sei Z ein Fundamentalsystem von $y'(t) = A(t)y(t)$. Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{t\to\infty} \det Z(t) = 0$$

gilt.

(b) Es sei $A : [0,T] \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ stetig und X bzw. Y seien Fundamentalsysteme von $x'(t) = A(t)x(t)$ bzw. $y'(t) = -A^{\mathrm{T}}(t)y(t)$ mit $X(0) = Y(0) = Id$. Zeigen Sie, dass dann

$$X(t) = (Y^{\mathrm{T}}(t))^{-1}, \qquad t \in [0,T],$$

gilt.

(G 3)

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\phi(t) = \binom{\phi_1(t)}{\phi_2(t)} : I \to \mathbb{C}^2$ und $\psi(t) = \binom{\psi_1(t)}{\psi_2(t)} : I \to \mathbb{C}^2$ zwei differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie, dass

$$[\det(\phi(t), \psi(t))]' = \det(\phi'(t), \psi(t)) + \det(\phi(t), \psi'(t))$$

gilt.

Hausübungen

(H 1) (Homogene lineare Differentialgleichung)

Wir betrachten für $t > 0$ das folgende homogene Differentialgleichungssystem:

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + \frac{1}{t} y_2 \\ y_2' = (1-t)y_1 + y_2 \end{cases}$$

Stellen Sie dieses System in Matrix-Form da und bestimmen Sie ein Fundamentalsystem.

(H 2) (Inhomogene lineare Differentialgleichung)

Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden inhomogenen Differentialgleichungssystems auf $[1, \infty[$.

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + \frac{1}{t} y_2 + \ln t + \frac{1}{t} \\ y_2' = (1-t)y_1 + y_2 + (t-1)\ln t \end{cases}$$

(H 3) (Matrix-Exponential-Funktion)

Es seien A, B zwei $n \times n$ Matritzen über $\mathbb{C}$. In der Vorlesung wurde die Matrix-Exponential-Funktion $e^{tA} := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j A^j$ für beliebiges $t \in \mathbb{R}$ definiert. Insbesondere gilt also $e^{0A} := Id$. Beweisen Sie nun die folgenden Aussagen:

(a) Es gilt $e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB}$ falls $AB = BA$ gilt.

(b) $e^{(s+t)A} = e^{sA} \cdot e^{tA}$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$,

(c) $\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) = A e^{tA}$.

(d) $\left(e^{tA}\right)^{-1} = e^{-tA}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(e) $e^{t \cdot \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)} = \mathrm{diag}(e^{t\lambda_1}, \ldots, e^{t\lambda_n})$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(f) $e^{tA + \lambda Id} = e^{\lambda} e^{tA}$ für $t \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$.

(g) Aus $e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB}$ für alle $t \in \mathbb{R}$, folgt $AB = BA$.