**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Tobias Hansel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 18./19.11.2008

# Analysis III – Gewöhnliche Differentialgleichungen

## 3. Übung

### Gruppenübungen

**(G 1) (Gleichgradige Stetigkeit)**

(a) Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ und $M > 0$ eine Konstante. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathcal{F}_1 = \{f \in C^1([a,b],\mathbb{R}) : |f'(x)| \leq M \text{ für alle } x \in [a,b]\}$$

gleichgradig stetig ist.

(b) Welche der folgenden Teilmengen von $C([0,1],\mathbb{R})$ sind gleichgradig stetig? Welche sind relativ kompakt?

$$\mathcal{F}_2 = \{f : f(x) = x^\alpha, 1 \leq \alpha < 2\}$$
$$\mathcal{F}_3 = \{f : f(x) = x^\alpha, 0 < \alpha < \infty\}$$
$$\mathcal{F}_4 = \{f : f(x) = n\cos\left(\frac{1}{n}x\right), n \in \mathbb{N}\}$$

**(G 2)**

Es sei $D = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2 : t^2 + y^2 < 1\}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(t,y) = \sin\left(\frac{1}{1-(t^2+y^2)}\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem $y' = f(t,y), y(0) = 0$ eindeutig lösbar ist.

(b) Es sei $u : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems aus Teil (a). Zeigen Sie:

1. $-t_- = t_+$;
2. $\lim_{t \nearrow t_+} u(t)$ existiert;
3. $\lim_{t \nearrow t_+} t^2 + u^2(t) = 1$.

**(G 3) (Modellierung)**

Durch das Land Sisylana (die $x$-$y$-Ebene) fließt ein Fluß, dessen Ufer durch $x = 0$ und $x = 1$ gegeben sind. Er fließt mit konstanter Geschwindigkeit $v_0$ in positive $y$-Richtung. Ein Hund springt im Punkt $(1,0)$ in den Fluß und versucht, sein Herrchen zu erreichen, das in $(0,0)$ auf ihn wartet. Der Hund schwimmt mit konstanter Geschwindigkeit $v_1$ und richtet sich immer genau auf sein Herrchen, während er abgetrieben wird. Bestimmen Sie die Kurve $y = \varphi(x)$, die der Hund zurücklegt. Wird er das Ufer $x = 0$ erreichen? Wo?
Hinweis: $\int \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}dx = arcsinh\ z$ und $\sinh x = 1/2(e^x - e^{-x})$.

# Hausübungen

**(H 1) (Flüsse)**

Sei $I = [0, \tau] \subset \mathbb{R}$ und $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ eine stetige Funktion, die einer globalen Lipschitzbedingung genügt. Zeigen Sie, dass es einen stetigen Fluss $v : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gibt, so dass für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ die Abbildung $t \mapsto v(t, x)$ eine Lösung des Anfangswertproblems $y'(t) = f(y(t)),\ y(0) = x$ ist.

**(H 2)**

Sei $I \subset [0, 1]$ ein hinreichend kleines Intervall. Zeigen Sie: Es gibt eine differenzierbare Funktion $u : I \to \mathbb{R}$ mit $u(0) = 0$ und

$$u'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^k \cos(2^k u(t)), \qquad t \in I.$$

Zeigen Sie, dass für jede solche Funktion

$$|u(t)| \leq 2 \cdot \ln\left(\frac{2}{2-t}\right), \qquad t \in I,$$

gilt.

**(H 3) (Maximale Lösung)**

(a) Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to (0, \infty)$ eine stetige Abbildung, die lokal einer Lipschitzbedingung genügt. Zeigen Sie: Für eine maximale Lösung

$$u : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}, \quad \text{von} \quad y' = f(t, y)$$

gilt $t_+ = \infty$ oder $\lim_{t \to t_+} |u(t)| = +\infty$.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitzbedingung genügt und sei $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$y'(t) = f(y),\ y(t_0) = y_0 \text{ hat eine Lösung auf } [t_0, \infty) \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{y_0}^{\infty} \frac{1}{f(\xi)}\, d\xi = \infty.$$

*Bemerkung*: Die Aussage in Teil (a) gilt auch für Funktionen $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Vergleichen Sie die Aussage in Teil (a) mit (G2) (b).