Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Tobias Hansel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 4./5.11.2008

Analysis III – Gewöhnliche Differentialgleichungen

2. Übung

Gruppenübungen

(G 1) (Lipschitzbedingungen)

(a) Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lokalen oder globalen Lipschitzbedingungen genügen.

1. $f(t,y) = y^2$
2. $f(t,y) = \frac{1}{1+y^2}$
3. $f(t,y) = e^t y$
4. $f(t,y) = \arctan(t+y)$

(b) Auf dem 1. Übungsblatt (Aufgabe G2) haben wir gezeigt, dass die Differentialgleichung $y'(t) = \sqrt{|y(t)|}$, $t \in \mathbb{R}$, mit Anfangswert $y(0) = 0$ unendlich viele Lösungen besitzt. Warum ist dies kein Widerspruch zu Kapitel II, Satz 1.6?

(G 2)

Bei der Neueröffnung eines großen Supermarktes befinden sich 5000 Euromünzen mit deutscher Prägung in der Kasse. Pro Tag werden der Kasse 250 Euromünzen zugeführt, von denen 10 ausländische Prägung haben. Ebenso werden täglich 250 Münzen aus der Kasse ausgegeben. Die Konzentration ausländischer Euromünzen in der Kasse soll als differenzierbare Funktion angenommen werden.

a) Stellen Sie für die Konzentration der Euromünzen mit ausländischer Prägung eine Differenzialgleichung auf.

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem.

c) Berechnen Sie die Konzentration für $t \to \infty$.

(G 3) (Äquivalente Metrik)

Sei $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Wir betrachten den Raum $C(I,\mathbb{R}^n)$ der stetigen Funktionen $f : I \to \mathbb{R}^n$ versehen mit der üblichen Metrik d, definiert durch

$$d(u,v) := \sup_{t\in I} \|u(t) - v(t)\|_2, \quad u,v \in C(I,\mathbb{R}^n),$$

wobei $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

(a) Sei $L \geq 0$. Zeigen Sie, dass $\tilde{d}$ definiert durch

$$\tilde{d}(u,v) := \sup_{t \in I} \|e^{-(L+1)t}(u(t) - v(t))\|_2, \quad u,v \in C(I,\mathbb{R}^n),$$

ebenfalls eine Metrik auf dem Raum $C(I,\mathbb{R}^n)$ definiert.

(b) Zeigen Sie, dass die Metrik $\tilde{d}$ äquivalent zur Metrik d ist, d.h. es existieren Kontanten $0 < m \leq M$ mit

$$m\, d(u,v) \leq \tilde{d}(u,v) \leq M\, d(u,v),$$

für alle $u,v \in C(I,\mathbb{R}^n)$.

(c) Nun sei (X,d) ein beliebiger metrischer Raum und $\tilde{d}$ eine zu d äquivalente Metrik. Zeigen Sie, dass der metrische Raum $(X,\tilde{d})$ genau dann vollständig ist, falls (X,d) vollständig ist.

Hausübungen

(H 1) (Symmetrie von Lösungen)

Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitzbedingung genüge. Es gelte $f(-t,x) = -f(t,x)$ für alle $(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Zeigen Sie: Ist $r > 0$, so ist jede Lösung $u : [-r,r] \to \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung $y' = f(t,y(t))$ eine gerade Funktion, das heißt $u(t) = u(-t)$.

(H 2) (Lipschitzbedingung)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Ist $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(D,\mathbb{R}^n)$, so genügt f in D einer lokalen Lipschitzbedingung.

(b) Genügt f in der offenen Menge $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ einer lokalen Lipschitzbedingung und ist $K \subset D$ kompakt, so genügt f in K einer Lipschitzbedingung.

(H 3)

Gegeben sei die Differentialgleichung $y'(t) = 2ty$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$.

(a) Besitzt diese DGL auf einer hinreichend kleinen Umgebung von $t_0 = 0$ eine eindeutige Lösung?

(b) Lösen Sie diese DGL mit einer Lösungsmethode aus Kapitel I.

(c) Führen Sie die Picard-Iteration durch (vgl. Kapitel II, Bermerkung 1.3) und berechnen Sie die Iterationsfolge $u_n(t)$. Geben Sie ein möglichst großes Intervall an auf dem die Iterationsfolge $u_n(t)$ gleichmäßig gegen die Lösung $u(t)$ konvergiert.