Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 21./22.10.2008

Analysis III – Gewöhnliche Differentialgleichungen

1. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

(a) Bestimmen Sie Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta > -1$ so, dass die Funktion $y : (-\beta, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$y(x) = \alpha \ln(x + \beta)$$

eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = \mathrm{e}^{x - y(x) - \mathrm{e}^{y(x)}}, \quad y(1) = 0$$

ist.

(b) Geben Sie ein Anfangswertproblem an, dessen Lösung die Funktion $y(x) = \tan(\mathrm{e}^x)$ ist.

(G 2)

Wir betrachten die Differentialgleichung $y'(x) = \sqrt{|y(x)|},\ x \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$y(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_0)^2}{4}, & \text{falls } x \geq x_0, \\ 0, & \text{falls } x < x_0 \end{cases}$$

eine Lösung dieser Differentialgleichung ist und erraten Sie noch eine weitere (offensichtliche) Lösung.

(b) Skizzieren Sie eine Auswahl dieser Lösungen in ein Schaubild.

(c) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem zu dieser Differentialgleichung mit $y(0) = 0$ unendlich viele Lösungen hat.

(G 3)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass jede Lösung der Differentialgleichung $y' = f(y)$ entweder monoton wachsend oder monoton fallend ist.

Bemerkung: Eine solche Differentialgleichung, bei der f nicht von x abhängt, nennt man *autonome Differentialgleichung*. Betrachten Sie sich im Lichte dieses Ergebnisses auch noch mal die Lösungen aus Aufgabe G2.

Hausübungen

(H 1)

Wir betrachten die Differentialgleichung $y'(x) = \sin^2(x)$.

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen dieser Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie alle $y_0 \in \mathbb{R}$, für die das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \sin^2(x), \quad y(0) = y_0$$

eindeutig lösbar ist.

(c) Warum war diese Differentialgleichung so einfach?

(H 2)

Es sei $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $y(x) = \frac{1-4e^{5x}}{1+e^{5x}}$, $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass y Lösung einer Differentialgleichung der Form $y'(x) = \alpha y(x)^2 + \beta y(x) + \gamma$ mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ist und bestimmen Sie α, β und γ. Geben Sie weiter ein Anfangswertproblem an, dessen Lösung y ist.

(H 3)

(a) Es sei $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es sei $y'(a) < \lambda < y'(b)$. Begründen Sie, dass dann ein $x_0 \in (a, b)$ existiert mit $y'(x_0) = \lambda$.

(b) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } y \in \mathbb{Q}, \\ 2, & \text{falls } y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass die Differentialgleichung $y' = f(y)$ keine Lösung besitzt.