Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dipl. Math. Sarah Drewes
Dipl. Math. Carsten Ziems

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SoSe 2009
15.07.2009

13. Übungsblatt zur „Mathematik IV für Elektrotechnik/ Mathematik III für Informatik“

Gruppenübung

Aufgabe G46 (Testverfahren)

Eine neue Sorte von Reagenzgläsern soll mit einer gebräuchlichen Sorte, bei der die mittlere Schmelztemperatur 745 Grad Celsius beträgt, verglichen werden. Bei der neuen Sorte von Reagenzgläsern wurden folgende Temperaturwerte ermittelt (in Grad Celsius):

$$785 \;\; 650 \;\; 730 \;\; 820 \;\; 671 \;\; 790 \;\; 611 \;\; 715$$

$$828 \;\; 742 \;\; 631 \;\; 750 \;\; 653 \;\; 621 \;\; 720 \;\; 675$$

Es wird angenommen, dass die Messwerte $x_1, x_2, \ldots, x_{16}$ eine Realisierung von unabhängigen identisch $N(\mu, 4900)$ - verteilten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_{16}$ sind.
Durch Anwendung eines geeigneten Tests zum Niveau $\alpha = 0.05$ überprüfe man

a) die Hypothese $H_0 : \mu = 745$ gegen $H_1 : \mu \neq 745$,
b) die Hypothese $H_0 : \mu \geq 745$ gegen $H_1 : \mu < 745$.

Hinweis: Es gilt $\bar{X}_{(16)} = 712$.

Aufgabe G47 (Testverfahren)

Um die Genauigkeit eines neu entwickelten Gerätes zur Messung von Weglängen im Gelände zu kontrollieren, wurde eine bestimmte Strecke von genau 1000 m zehnmal vermessen. Es ergaben sich folgende Meßwerte (in m) :

$$998.0 \;\; 1001.0 \;\; 1003.0 \;\; 1000.5 \;\; 999.0 \;\; 997.5 \;\; 1000.0 \;\; 999.5 \;\; 996.0 \;\; 998.5$$

Es wird angenommen, dass die Messwerte eine Realisierung unabhängiger $N(\mu, \sigma^2)$ - verteilter Zufallsvariablen sind.

a) Überprüfe zum Niveau $\alpha = 0.05$ die Hypothese, dass das Gerät die korrekte Entfernung als Erwartungswert hat.
b) Das Gerät soll nur dann angeschafft werden, wenn es eine höhere Genauigkeit besitzt als die bisher verwendeten Geräte, deren Messgenauigkeit durch die Varianz von $\sigma_0^2 = 4[m^2]$ charakterisiert ist. Es soll daher mit einem geeigneten Testverfahren zum Niveau $\alpha = 0.05$ die Hypothese überprüft werden, dass das neue Gerät die Varianz der herkömmlichen Geräte nicht unterschreitet.
Beurteile anhand Deines Tests, ob das Gerät angeschafft wird.

Hinweis: Es gilt $\bar{X}_{(10)} = 999.3$ und $S^2_{(10)} = 3.9$. Für die Quantile $t_{n,p}$ der t_n-Verteilung gilt $t_{n,1-p} = -t_{n,p}$.

Aufgabe G48 (Konfidenzintervalle für Defektwahrscheinlichkeiten)

Man ist an einem Konfidenzintervall für die Defektwahrscheinlichkeit $\theta \in (0,1)$ eines Produktionsprozesses interessiert. Um die Anzahl defekter Produkte in einer Stichprobe vom Umfang n zu zählen verwenden wir unabhängig identisch $B(1,\theta)$-verteilte Zufallsvariablen $X_1, \ldots X_n$, wobei $X_i = 1$ für $i = 1, \ldots n$, falls das i-te Produkt defekt ist. Die Anzahl defekter Produkte in der Stichprobe, also die Summe $Y = X_1 + \ldots X_n$, ist dann aufgrund der Unabhängigkeitsannahme $B(n,\theta)$-verteilt.

(a) Zeige, dass gilt

$$P_\theta(-u_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{Y - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = P_\theta((Y-n\theta)^2 \leq u^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot n\theta(1-\theta)) \approx 1 - \alpha\,.$$

(b) Folgere daraus, dass θ mit Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$ im Konfidenzintervall

$$\begin{aligned} I(X_1, \ldots X_n) = \Bigg[& \frac{1}{n + u^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} \left(Y + \frac{u^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{Y(1-\frac{Y}{n}) + \frac{u^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{4}} \right), \\ & \frac{1}{n + u^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} \left(Y + \frac{u^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{Y(1-\frac{Y}{n}) + \frac{u^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{4}} \right) \Bigg] \end{aligned}$$

liegt.

(c) Ein Hersteller von Elektrogeräten möchte eine grössere Lieferung Transistoren auf ihre Qualität testen. Dazu überprüft er 400 zufällig ausgewählte Transistoren, von denen 12 nicht den Qualitätsanforderungen genügen. Berechne ein Konfidenzintervall für die Ausschusswahrscheinlichkeit zum Niveau 0.95.

Aufgabe G49 (Testverfahren)

Eine bestimmte Weizensorte wird auf 9 vergleichbaren, gleich großen Versuchsflächen angebaut. Aus Erfahrung weiß man, dass die Erträge der einzelnen Versuchsflächen als eine Stichprobe unabhängiger, identisch $N(\mu, 3.24)$-verteilter Zufallsvariablen angesehen werden können. Es ergibt sich ein arithmetisches Mittel von 105.0 [dz].

a) Überprüfe mit einem geeigneten Testverfahren die Nullhypothese $H_0 : \mu = 106.0$ auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.1$.

b) Welche Entscheidung würde sich auf dem Niveau $\alpha = 0.05$ ergeben?

c) Überprüfe mit einem geeigneten Testverfahren die Nullhypothese $H_0 : \mu \geq 106.0$ auf dem Niveau $\alpha = 0.01$.

d) Überprüfe mit einem geeigneten Testverfahren die Nullhypothese $H_0 : \mu \leq 106.0$ auf dem Niveau $\alpha = 0.01$.

Aufgabe G50 (Testverfahren)

Um die Genauigkeit eines neu entwickelten Gerätes zur Messung von Weglängen im Gelände zu kontrollieren, wurde eine bestimmte Strecke von genau 1000 m zehnmal vermessen. Es ergaben sich folgende Meßwerte (in m) (wie in G47):

998.0 1001.0 1003.0 1000.5 999.0 997.5 1000.0 999.5 996.0 998.5

Es wird angenommen, dass die Messwerte eine Realisierung unabhängiger $N(\mu, \sigma^2)$ - verteilter Zufallsvariablen sind.

a) Überprüfe zum Niveau $\alpha = 0.05$ die Hypothese, dass das Gerät mindestens die korrekte Entfernung als Erwartungswert hat.

b) Überprüfe unter der Voraussetzung, dass $\sigma^2 = 4$ gilt, zum Niveau $\alpha = 0.05$ die Hypothese, dass das Gerät die korrekte Entfernung als Erwartungswert hat.

Hinweis: Es gilt $\bar{X}_{(10)} = 999.3$ und $S^2_{(10)} = 3.9$.

Aufgabe G51 (Testfragen zur Statistik)

Teste Dein Statistik-Wissen: Im Folgenden findest Du ein paar kurze Fragen zu ausgewählten Themen der Statistik, die in der Vorlesung behandelt wurden. Gib jeweils an, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Es kann auch mehr als eine Antwort korrekt sein.

(a) Was trifft beim Würfelwurf unter der Laplace-Annahme für die Ereignisse $A = \{1, 2, 3\}$,$B = \{2, 4\}$ und $C = \{4, 5, 6\}$ zu ?

   i. A und B sind unabhängig
   ii. B und C sind unabhängig
   iii. A und C sind unabhängig.

(b) X sei $R(a, b)$-verteilt, dann gilt für $\alpha \in \mathbf{R}$:

   i. αX ist $R(\alpha a, \alpha b)$-verteilt für $\alpha > 0$
   ii. αX ist $R(\alpha a, \alpha b)$-verteilt für $\alpha < 0$
   iii. $X - \alpha$ ist $R(a - \alpha, b - \alpha)$-verteilt.

(c) X und Y seien unabhängig mit $E(X) = 1$, $Var(X) = 3$, $E(Y) = 2$ und $Var(Y) = 4$. Dann ist:

   i. $E(X + Y) = 3$
   ii. $Var(X + Y) = 7$
   iii. $Var(3X + 4Y) = 91$.

(d) $X_1, \ldots X_n$ seien unabhängig, identisch $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt. Dann gilt für $Y = X_1 + \ldots X_n$:

   i. $P(Y \geq n\mu) = \frac{1}{2}$
   ii. $P(Y \geq n\mu + \sqrt{n}\sigma) = P(X_1 \leq \mu - \sigma)$
   iii. $P(Y \leq n\mu + \sigma) = P(X_1 \geq \mu - \sigma)$.

(e) $X_1, \ldots X_n$ seien unabhängig, identisch $N(0, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariablen mit $\sigma > 1$. Dann gilt:

   i. $X_1^2 + \ldots X_n^2$ ist $\mathcal{X}_n^2$-verteilt
   ii. $\sigma^2(X_1^2 + \ldots X_n^2)$ ist $\mathcal{X}_n^2$-verteilt
   iii. $\frac{1}{\sigma^2}(X_1^2 + \ldots X_n^2)$ ist $\mathcal{X}_n^2$-verteilt.

(f) $X_1, \ldots X_n$ seien unabhängig, identisch $N(0, \theta)$-verteilte Zufallsvariablen, $\theta > 0$. Dann gilt für $T_n(X_1, \ldots X_n) = \sum_{i=1}^n X_i^2$:

   i. T_n ist erwartungstreu für $\tau(\theta) = \theta$
   ii. $\frac{1}{n}T_n$ ist erwartungstreu für $\tau(\theta) = \theta$
   iii. $\frac{1}{n-1}T_n$ ist erwartungstreu für $\tau(\theta) = \theta$.

(g) $X_1, \ldots X_{100}$ seien unabhängig, identisch $N(\theta, 25)$-verteilt, $\theta \in \mathbf{R}$. Für $\tau(\theta) = \theta$ gibt es ein Konfidenzintervall zum Niveau $1 - \alpha = 0.95$ mit einer Länge von:

   i. 1.96
   ii. 0.98
   iii. 3.92.