Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dipl.-Math. Sarah Drewes
Dipl.-Math. Carsten Ziems

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SoSe 2009
08.07.2009

12. Übungsblatt zur „Mathematik IV für Elektrotechnik/ Mathematik III für Informatik“

Gruppenübung

Aufgabe G41 (Maximum-Likelihood-Schätzer)

Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ seien unabhängig und identisch verteilt wie X. Für einen Parameter $\theta > 0$ sei die Dichte der Zufallsvariablen X gegeben durch

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta}\exp(-\frac{x^2}{\theta}) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases} .$$

Bestimme einen Maximum-Likelihood-Schätzer für θ.

Aufgabe G42 (Erwartungstreue und Konistenz von Schätzern)

Die Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ seien unabhängig und identisch rechteckverteilt im Intervall $[\theta - 1, \theta + 1]$ (kurz: $R(\theta - 1, \theta + 1)$-verteilt), mit $\theta \in \mathbf{R}$ unbekannt.

a) Zeige, dass das arithmetische Mittel $T_n(X_1, ..., X_n) = \bar{X}_{(n)}$ ein erwartungstreuer Schätzer für $\tau(\theta) = \theta$ ist.

b) Ist die Schätzerfolge $T_1, T_2 ...$ konsistent für $\tau(\theta) = \theta$?

Hinweis: Der Erwartungswert der allgemein in 11.5.2 gegebenen Rechteckverteilung ist $(b + a)/2$, und die Varianz ist $(b - a)^2/12$.

Aufgabe G43 (Konfidenzintervalle)

Bei der Größenmessung in einer Gruppe von 9 Personen ergaben sich folgende Körpergrößen [in cm]:

`184.2, 182.6, 185.3, 184.5, 186.2, 183.9, 185.0, 187.1, 184.4.`

Diese Messwerte werden als Realisationen der Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_9$ angenommen, die unabhängig und identisch $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt seien.

(a) Gib ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 0.99 für den Erwartungswert μ an, falls die Standardabweichung bekannt ist und $\sigma = 2.4$ [cm] beträgt.

(b) Welches Konfidenzintervall ergibt sich in (a) für dasselbe Konfidenzniveau, falls die Standardabweichung als unbekannt angenommen wird?

(c) Ermittel im letzteren Fall ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 0.9 für die Varianz σ^2.

Aufgabe G44 (Schätzer und Erwartungstreue)

Um die Präzision einer Waage zu überprüfen, wird n-mal das Gewicht eines Kilogramm-Prototyps gemessen. Die entstehende Messreihe soll als Realisierung von unabhängigen, identisch $N(1, \theta)$-verteilten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ mit unbekannter Varianz $\theta > 0$ aufgefasst werden.

a) Bestimme den Maximum-Likelihood-Schätzer T_n für $\tau(\theta) = \theta$.

b) Ist T_n erwartungstreu für $\tau(\theta) = \theta$?

Hinweis: Die Dichte der $N(\mu, \sigma^2)$ Verteilung ist gegeben durch $f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(t-\mu)^2/(2\sigma^2)}$, $t \in \mathbf{R}$.

Aufgabe G45 (Konfidenzintervalle)

Es werden Produktionsmaschinen für Kondensatoren hergestellt. Die Kapazität der Kondensatoren wird als normalverteilt angenommen. Eine Produktionsmaschine besteht die Qualitätskontrolle, wenn der Erwartungswert für die Kapazität der produzierten Kondensatoren (in nF) im Intervall [32,34] liegt. Im Rahmen der Qualitätskontrolle entnimmt ein Maschinenhersteller aus der Kondensatorenproduktion einer Maschine eine Stichprobe und misst folgende Kapazitäten: [Einheit: nF]

31.5	33.5	32.5	33	34.5

Bemerkung: Eine Tabelle mit den benötigten Quantilen befindet sich im Anhang.

(a) Die Standardabweichung sei unbekannt. Bestimme das Konfidenzintervall für den Erwartungswert der Kapazität der Kondensatoren μ mit Konfidenzniveau 0.8.

(b) Die Standardabweichung σ_0 sei nun bekannt. Bestimme das Konfidenzintervall für den Erwartungwert μ zum Konfidenzniveau 0.95 in Abhängigkeit von σ_0.
Wie groß darf die Standardabweichung σ_0 der Kapazität der Kondensatoren höchstens sein, damit das Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ zum Konfidenzniveau 0.95 im Intervall $[32, 34]$ liegt.

(c) Entscheide für die folgenden Aussagen, ob Sie nach den Ergebnissen aus a) und b) richtig oder falsch oder nicht entscheidbar sind. Begründe Deine Antworten.

1) Die Standardabweichung sei unbekannt. Dann liegt die Kapazität eines Kondensators mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.8 im Intervall $[32, 34]$.
2) Mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.8 erfüllt die Produktionsmaschine die Qualitätskontrolle, wenn die Standardabweichung für die Kapazität der Kondensatoren unbekannt ist.
3) Die Standardabweichung für die Kapazität sei 1.5 nF. Dann liegt die Kapazität eines Kondensators mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.95 im Intervall $[32, 34]$.
4) Es sei σ_0 maximal gegeben, so dass das Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ zum Konfidenzniveau 0.95 bei obiger Stichprobe im Intervall $[32, 34]$ liegt. Dann liegt auch der Erwartungswert für die Kapazität der Kondensatoren selbst mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.95 im Intervall $[32, 34]$.
5) Die Standardabweichung für die Kapazität sei 1.5 nF. Dann erfüllt diese Produktionsmaschine mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.95 die Qualitätskontrolle.