Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dipl. Math. Sarah Drewes
Dipl. Math. Carsten Ziems

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SoSe 2009
02.07.2009

11. Übungsblatt zur „Mathematik IV für Elektrotechnik/ Mathematik III für Informatik“

Gruppenübung

Aufgabe G37 (Binomialverteilung, Poissonverteilung, diskrete Zufallsvariable)

a) Bei einer Lotterie beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine Niete bei jedem Zug 0.7. Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl an Nieten beim Ziehen von zehn Losen. Bestimme die Verteilung von X sowie die Wahrscheinlichkeit für mindestens acht Nieten.

b) Die Anzahl der Abfragen einer Internetseite, die innerhalb einer Minute registriert werden, lässt sich durch eine Poisson-verteilte Zufallsvariable angemessen beschreiben. Für eine bestimmte Internetseite sei bekannt, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.05 innerhalb einer Minute keine Abfrage registriert wird. Berechne für diese Seite die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es mehr als drei Abfragen innerhalb einer Minute gibt.

Aufgabe G38 (Erwartungswert und Varianz, stetige Zufallsvariablen)

Die Zufallsvariable X sei stetig verteilt mit der Dichte

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

a) Bestimme die Verteilungsfunktion von X.

b) Ermittle die Verteilungsfunktion und den Erwartungswert der Zufallsvariablen X^2.

c) Bestimme den Erwartungswert und die Varianz von X.

Aufgabe G39 (Normalverteilung)

a) Wir gehen von einer normalverteilten Zufallsvariablen Y mit Erwartungswert 0 und Varianz 1 aus (kurz: $Y \sim N(0,1)$, auch als Standardnormalverteilung bezeichnet) und betrachten die Zufallsvariable $Z = 5 \cdot Y + 100$. Man kann zeigen, dass Z wieder normalverteilt ist. Überprüfe, dass $E(Z) = 100$ und $Var(Z) = 25$ gilt.

b) Die Zufallsvariable X beschreibe die Größe (in *mm*) einer bestimmten Pflanze im Alter von 30 Tagen. Es wird angenommen, dass X normalverteilt ist mit Erwartungswert 100 und Varianz 25, also $X \sim N(100, 25)$. Berechne die folgenden Wahrscheinlichkeiten:
(i) $P(90 \leq X \leq 110)$ und (ii) $P(X > 107)$.
Nutze dabei die Ergebnisse aus a).

Aufgabe G40 (Tschebyschevsche Ungleichung,Normalverteilung, zentraler Grenzwertsatz)

Der Durchmesser neu produzierter Autokolben werde durch eine normalverteilte Zufallsvariable X angemessen beschrieben. Aus Erfahrung kennt man die Varianz von X ($\mathrm{Var}(X) = 0.04(mm^2)$), der Erwartungswert ist jedoch unbekannt. Es soll die Mindestanzahl von durchzuführenden Messungen ermittelt werden, so dass die Differenz zwischen dem Erwartungswert und dem arithmetischen Mittel der Messwerte mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.9 kleiner als $0.1(mm)$ ist.

(a) Bestimme eine obere Schranke für diese Anzahl durch Anwendung der Tschebyschevschen Ungleichung. Benutze dabei den zentralen Grenzwertsatz, um die Verteilung von $\bar{X}_{(n)}$ zu bestimmen.

(b) Bestimme die gesuchte Anzahl exakt. Transformiere dazu (an geeigneter Stelle) auf Standardnormalverteilung und benutze die Tabelle aus dem Anhang.

Hausübung

Aufgabe H38 (Diskrete Zufallsvariablen, geometrische Verteilung)

Beim Roulette tritt in einem Spiel eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, 36$ auf. Ein abergläubiger Spieler beginnt erst mit dem Spiel, nachdem zum ersten Mal eine seiner Unglückszahlen 3, 13, 23 oder 33 aufgetreten ist. Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl von Runden, die dieser Spieler warten muss, bevor er mit seinem Spiel beginnen kann.

a) Bestimme die Verteilung von X und berechne die Wahrscheinlichkeit $P(2 \leq X < 5)$.

b) Zeige, dass für eine mit Parameter $p \in]0, 1]$ geometrisch verteilte Zufallsvariable X gilt:

$$\forall k \in \mathbf{N}_0 : P(X > k) = (1 - p)^k.$$

Aufgabe H39 (Erwartungswert und Varianz, diskrete Zufallsvariablen)

Für eine diskrete Zufallsvariable X sei die folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion P gegeben:

x	-1	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	0.05	0.05	0.20	0.25	0.20	0.25

Bestimme die Wahrscheinlichkeiten $P(0 \leq X < 3)$ und $P(X > 2)$ sowie den Erwartungswert und die Varianz von X.

Aufgabe H40 (Exponentialverteilung, Binomialverteilung)

In einen Kronleuchter werden gleichzeitig 10 Glühbirnen eines bestimmten Typs eingeschraubt. Die Lebensdauer einer Glühbirne dieses Typs (in Stunden) lasse sich durch eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit $\lambda = \frac{1}{500} \ln\left(\frac{4}{3}\right)$ angemessen beschreiben. Für die Lebensdauern der einzelnen Glühbirnen wird die Unabhängigkeitsannahme getroffen.

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Glühbirne dieses Typs eine Lebensdauer von über 500 Stunden hat.

b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 8 der 10 Glühbirnen eine Lebensdauer von über 500 Stunden haben.

c) Bestimme den Erwartungswert und die Varianz der Anzahl der Glühbirnen, die eine Lebensdauer von über 500 Stunden haben.

Aufgabe H41 (Dichte, Rechteckverteilung, Tschebyschevsche Ungleichung, Normalverteilung)

Bei der Beladung eines LKW mit Kisten muss darauf geachtet werden, dass das Gewicht der Ladung höchstens 7.8 Tonnen beträgt. Die Gewichte [in kg] der einzelnen Kisten sollen durch identisch stetig verteilte Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ beschrieben werden, für die folgende Dichte angenommen wird:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} & \text{für } 105 \leq x \leq 135 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Zeige, dass f eine Dichte ist.

b) Bestimme den Erwartungswert und die Varianz des Gewichts einer einzelnen Kiste.

c) Bestimme mittels der Ungleichung von Tschebyschev eine Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass das Gesamtgewicht von $n = 64$ dieser Kisten zwischen 7.56 Tonnen und 7.8 Tonnen liegt. (Setze dabei die Unabhängigkeit von $X_1, \ldots, X_{64}$ voraus.)

d) Berechne unter der Unabhängigkeitsannahme einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit, dass das zulässige Gewicht der Ladung eingehalten wird, wenn auf dem LKW $n = 64$ Kisten geladen werden. *Hinweis:* Benutze die Normalverteilungstabelle.

Werte $\Phi(z)$ der Verteilungsfunktion der $N(0,1)$–Standardnormalverteilung

Tabelle siehe nächste Seite.

Arbeiten mit der Tabelle:
Aus der Tabelle kann die Wahrscheinlichkeit $\Phi(z)$ für die Standardnormalverteilung ermittelt werden. Aufgrund des Zusammenhanges $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ (und damit auch wegen der Symmetrie der Gauß'schen Glockenkurve) sind hier nur die positiven Werte von z zu finden.
Ist nun die Wahrscheinlichkeit $\Phi(z)$ für Werte von z im Intervall von 0 bis 4.09 gesucht, so steht z bis zum Zehntel in der linken Randzeile der Tabelle und das Hunderstel findet sich in der Kopfzeile. Dort wo sich die zugehörige Zeile und Spalte kreuzen steht die Wahrscheinlichkeit $\Phi(z)$.
Übersteigt z die Grenze von 4.09, dann gilt $\Phi(z) \approx 1$ für $z > 4.09$.
Vorsicht ist bei der Umkehrung geboten, bei der eine Wahrscheinlichkeit vorgegeben und das dazugehörige z gesucht ist. Hier muss derjenige Wert $\Phi(z)$ angesehen werden, der den geringeren Abstand zur vorgegebenen Wahrscheinlichkeit hat. Anschließend setzt man z aus der Zeile und Spalte dieses Wertes zusammen. Ist also z.B. die Wahrscheinlichkeit 0.90670 gegeben, so wird in der Tabelle der Wert 0.90658 (entspricht einem z von 1.32) gewählt, weil dieser viel näher liegt, als der nächste mögliche Wert von 0.90824 (wobei dieser ein z von 1.33 ergäbe).

Anmerkung: Negative Werte werden aus Gründen der Symmetrie nicht angegeben, weil $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ ist.

z \ *	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0*	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1*	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2*	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3*	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4*	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5*	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6*	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7*	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8*	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9*	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0*	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1*	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2*	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3*	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4*	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5*	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6*	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7*	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8*	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9*	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0*	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1*	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2*	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3*	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4*	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5*	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6*	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7*	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8*	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9*	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0*	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1*	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2*	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3*	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4*	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5*	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6*	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7*	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8*	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9*	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0*	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998